МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

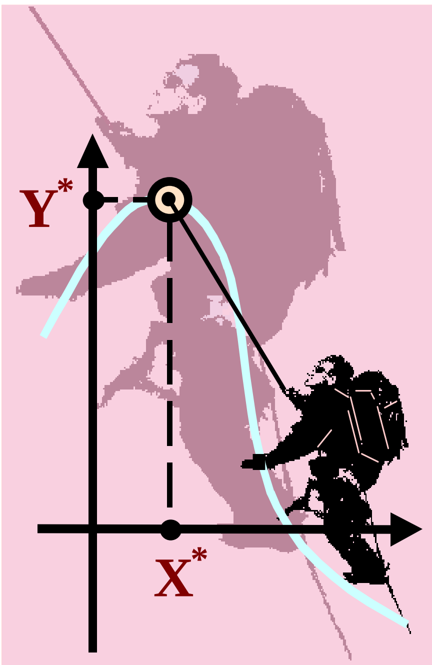
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання практичних завдань
та самостійної роботи з дисципліни

“МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ”

(*для студентів денної і заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»)*



Харків – ХНАМГ – 2009

Методичні вказівки до виконання практичних завдань та самостійної роботи з дисципліни «Математичне програмування» (для студентів денної і заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»). / Укл.: Білогурова Г.В., Клименко О.В., Протопопова В.П., Самойленко М.І., Штельма О.М., – Х.: ХНАМГ, 2009. – 104 с.

Укладачі: Г.В. Білогурова,
О.В. Клименко,
В.П. Протопопова,
М.І. Самойленко,
О.М. Штельма

Методичні вказівки побудовані за вимогами кредитно-модульної системи організації навчального процесу та узгоджена з орієнтовною структурою змісту навчальної дисципліни, рекомендованою Європейською Кредитно-Трансферною Системою (ECTS).

Рецензент: доц. кафедри прикладної математики і інформаційних технологій Харківської національної академії міського господарства, к. ф-м. н. О.Б. Костенко

Рекомендовано кафедрою прикладної математики і інформаційних технологій, протокол №1 від 28.08.2009 р.

МОДУЛЬ «МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ»

Змістовий модуль 1 – Лінійне програмування

1.1. Жорданові виключення та їх застосування в лінійній алгебрі

1.1.1. Жорданові виключення

Жорданові виключення – це математичний метод, який у системі лінійних рівнянь у вигляді лінійних форм (без вільних членів)

$$s_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} t_j \ , \quad i = \overline{1, m}, \tag{1.1}$$

робить транспозицію (взаємну заміну) будь-якої залежної змінної s_k і будь-якої незалежної t_r без яких-небудь попередніх алгебраїчних перетворень.

Для виконання жорданових виключень використовують спеціальні таблиці, що називаються таблицями жорданових виключень. Ці таблиці дозволяють у процесі транспозиції змінних подавати в зручній формі як початкову (1.1), так і результуючу системи лінійних форм.

Подамо систему лінійних форм (1.1) у матричному вигляді

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdots \\ s_k \\ \cdots \\ s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & \cdots & a_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_r \\ \cdots \\ t_p \end{bmatrix}. \tag{1.2}$$

Таблиці жорданових виключень нагадують матричне подання системи лінійних форм. Так, початкова таблиця має вигляд:

	t_1	t_2	...	t_r	...	t_p
$s_1 =$	a_{11}	a_{12}	...	a_{1r}	...	a_{1p}
$s_2 =$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2r}	...	a_{2p}
...	...	...	...	...	...	...
$s_k =$	a_{k1}	a_{k2}	...	a_{kr}	...	a_{kp}
...	...	...	...	...	...	...
$s_m =$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mr}	...	a_{mp}

Елемент таблиці a_{kr} називати *головним,* або *розв’язуючим* елементом; k-й рядок матриці – *направляючим,* або *розв’язуючим* рядком; r-й стовпець – *направляючим,* або *розв’язуючим* стовпцем.

В результаті виконання жорданових виключень початкова таблиця набуває вигляду:

	t_1	t_2	...	s_k	...	t_p
$s_1 =$	b_{11}	b_{12}	...	b_{1r}	...	b_{1p}
$s_2 =$	b_{21}	b_{22}	...	b_{2r}	...	b_{2p}
...	...	...	...	...	...	...
t_r	b_{k1}	b_{k2}	...	b_{kr}	...	b_{kp}
...	...	...	...	...	...	...
$s_m =$	b_{m1}	b_{m2}	...	b_{mr}	...	b_{mp}

У результуючій таблиці змінна t_r стала залежної, а змінна s_k – незалежною. Інші змінні залишили свій статут без змін. Колишні коефіцієнти a_{ij} перетворилися на нові коефіцієнти b_{ij} за спеціальними правилами.

Правила жорданових виключень:

Правило 1. Новий головний елемент результуючої таблиці дорівнює оберненому головному елементові початкової таблиці:

$$b_{kr} = \frac{1}{a_{kr}}, \quad k \in \{i\}_1^m, \quad r \in \{j\}_1^p \ . \tag{1.3}$$

Правило 2. Нові елементи направляючого рядка дорівнюють відповідним старим у початковій таблиці, узятими із зворотним знаком і поділеним на головний елемент:

$$b_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{kr}}, \quad j = \overline{1, p}, \quad j \neq r \ . \tag{1.4}$$

Правило 3. Нові елементи направляючого стовпця дорівнюють відповідним старим, поділеним на головний елемент:

$$b_{ir} = \frac{a_{ir}}{a_{kr}}, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq k \ . \tag{1.5}$$

Правило 4. Елементи результуючої таблиці, що не розташовані на направляючому рядку або стовпці, визначаються за «схемою чотирикутника»:

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ir} a_{kj}}{a_{kr}}, \quad i = \overline{1, m}, \ i \neq k, \quad j = \overline{1, p}, \ j \neq r \ . \tag{1.6}$$

Процес перетворення матриці **A** в матрицю **B** за правилами (1.3) – (1.6) називають *кроком жорданових виключень.*

1.1.2. Обертання матриць за допомогою жорданових виключень

Якщо матрицю **A** подати як матрицю коефіцієнтів в системі лінійних форм:

$$\bar{s} = \mathbf{A}\,\bar{t}\ , \tag{1.7}$$

де **A** – *невироджена квадратна* матриця, тобто визначник матриці не дорівнює нулю і число залежних перемінних дорівнює числу незалежних змінних, то можна помітити, що множення обох частин рівності (1.7) на обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ *«зліва»* приводить до виразу:

$$\bar{t} = \mathbf{A}^{-1}\,\bar{s}\ . \tag{1.8}$$

Тобто транспозиція векторів залежних і незалежних змінних у початковій системі лінійних форм (1.7) автоматично перетворює матрицю коефіцієнтів **A** в обернену $\mathbf{A}^{-1}$. Для транспозиції векторів треба здійснити n кроків жорданових виключень, де n – порядок матриці.

Приклад 1.1. За допомогою жорданових виключень знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, що буде оберненою відносно матриці $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ та перевірити тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, де **I** –– одинична матриця.

Розв'язання. Перш за все, обчислимо *визначник* наданої матриці, щоб переконатися в існуванні оберненої матриці (вироджена матриця не має оберненої).

Будь-якій квадратній матриці **A** відповідає деяке число, що називається визначником або *детермінантом* і позначається $\det \mathbf{A}$ або $|\mathbf{A}|$.

Детермінант матриці обчислюється підсумовуванням певних добутків елементів матриці. Так, детермінант матриці другого порядку, тобто матриці розміру (2×2), визначається у спосіб: $\det \underset{2\times 2}{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Детермінант матриці третього порядку визначається як

$$\det \underset{3\times 3}{\mathbf{A}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.9}$$

Визначник матриці першого порядку дорівнює єдиному елементу матриці $\det \underset{1\times 1}{\mathbf{A}} = |a_{11}| = a_{11}$.

У загальному випадку детермінант матриці $\mathbf{A}$ n–го порядку визначається за формулою $\boxed{\|\mathbf{A}\| = \sum\left(\pm a_{1i} a_{2j} \ldots a_{nr}\right)}$, де сума береться за всіма перестановками других індексів співмножників, причому зі знаком плюс беруться члени з парними перестановками, а зі знаком мінус – члени з непарними перестановками.

В умовах прикладу згідно з формулою (1.9) $\det \mathbf{A} = 7$. Оскільки $\det \mathbf{A} \neq 0$, тому обернена матриця існує.

Для вирішення задачі подамо матрицю **A** як матрицю коефіцієнтів системи лінійних форм, тобто у вигляді (1.2):

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Перетворимо (1.10) у систему $\bar{t} = \mathbf{A}^{-1}\,\bar{s}$ з шуканою оберненою матрицею коефіцієнтів $\mathbf{A}^{-1}$. Для цього для системи (1.10) здійснимо послідовно три кроки жорданових виключень (у загальному випадку n кроків), щоразу обираючи як головній елемент один із діагональних, і тільки діагональних.

Мета жорданових виключень – замінити кожну залежну змінну s_i незалежної t_i, $\quad (i = \overline{1,3})$. Послідовність замін несуттєва.

Перший крок, якщо $a_{11} \neq 0$, здійснюється за схемою:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} t_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}. \tag{1.11}$$

Якщо діагональний елемент дорівнює нулю, то його неможна обирати як головний. В цьому випадку головним елементом беруть інший ненульовий діагональний елемент, а на наступному кроці, коли цей елемент вже буде відмінним від нуля, до нього знову повертаються і тоді обирають як головний.

Розкриємо (1.11) поступово – по мірі використання правил жорданових виключень:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} t_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{21} \\ \frac{1}{2} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно здійснюють ще два кроки, але головними елементів вже обирають інші діагональні елементи.

Після проведення трьох зазначених кроків жорданових виключень одержимо нову систему лінійних форм

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix},$$

в якій матриця коефіцієнтів являє собою шукану матрицю, тобто обернену щодо заданої.

Для перевірки правильності знайденого рішення необхідно перемножити вихідну і шукану матриці:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_3 .$$

Оскільки добутком цих матриць є одинична матриця, тому знайдена матриця згідно за визначенням є оберненою, тобто рішення знайдено правильно.

Приклад 1.2. Знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, обернену до матриці

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Розв'язання. В поданій матриці на першому кроці жорданових виключень неможна брати елемент, тому що він дорівнює 0. Як головний на 1-му кроці виберемо елемент a_{33}, на 2-му — a_{22}, в вже на 3-му — a_{11}.

При пошуку обернених матриць зовсім необов'язково в наведену схему (1.10) кожний раз залучати вектори змінних. Досить уявляти, що вони умовно залучені. Скорочену схему обернення матриці в умовах прикладу можна подавати у вигляді

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 5 & \boxed{-2} & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boxed{5} & -1 & 1 \\ 5/2 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1}.$$

Тут прямокутниками позначені головні елементи на кожному кроці.

Перевірка правильності знайденого рішення:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\mathbf{I}.$$

1.1.3. Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою жорданових виключень

Приклад 1.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 - 1 = 0, \\ x_2 - 2x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 2 = 0 \end{cases}$$

відносно змінних x_1, x_2, x_4 та перевірити правильність рішення при $x_3 = 1$.

Розв'язання. Вважаючи всі нулі в заданій системі рівнянь умовними змінними, які завжди дорівнюють нулю, подамо систему в вигляді

	x_1^*	x_2^*	x_3	x_4^*	1
0 =	1*	-1*	0	1*	-1
0 =	0	1*	-2	0	1
0 =	2*	0	1	-1*	2

В процесі розв’язання задачі необхідно виконати три кроки жорданових виключень, які дозволять три змінні x_1, x_2, x_4 поміняти місцями з умовними змінними, тобто з нулями, які розташовані в першому стовпці таблиці. Тим самим змінні x_1, x_2, x_4 стануть залежними, а змінна x_3 залишиться незалежною.

На першому кроці як головний елемент можна взяти тільки один з елементів, що в таблиці позначені символом «*».

Нехай на першому кроці головним елементом буде a_{11}, тоді згідно правилами жорданових виключень нова таблиця набуде вигляду

	0	x_2^*	x_3	x_4^*	1
x_1=	1	1	0	-1	1
0=	0	1*	-2	0	1
0=	2	2*	1	-3*	4

При складанні системи рівнянь в алгебраїчному вигляді за даними нової таблиці перший стовпець, що позначений нулем, дає тільки нульові члени, тому коефіцієнти, що знаходяться у цьому стовпці ніякого значення не мають. Їх взагалі можна було не обчислювати, а відповідний стовпець відразу можна було вилучити з таблиці:

	x_2^*	x_3	x_4^*	1
x_1=	1	0	-1	1
0=	1*	-2	0	1
0=	2*	1	-3*	4

Два наступні кроки дають такі таблиці:

	x_3	x_4^*	1
x_1 =	2	-1	0
x_2 =	2	0	-1
0=	5	-3*	2

	x_3	1
x_1 =	1/3	-2/3
x_2 =	2	-1
x_4 =	5/3	2/3

Остання таблиця дозволяє записати відповідь:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{3}x_3 - \dfrac{2}{3}, \\ x_2 = 2x_3 - 1, \\ x_4 = \dfrac{5}{3}x_3 + \dfrac{2}{3}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Перевірка правильності знайденого рішення. При $x_3 = 1$ згідно з (1.12) одержимо: $x_1 = -1/3$; $x_2 = 1$; $x_4 = 7/3$. Отримані значення змінних підставляємо у початкову систему:

$$\begin{cases} -1/3 - 1 + 7/3 - 1 = 0, \\ 1 - 2 + 1 = 0, \\ 2 \cdot (-1/3) + 1 - 7/3 = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Система рівнянь(1.13) є система тотожностей. Отже рішення (1.12) вірне.

Приклад 1.4. Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + 1 = 0, \\ -3x_2 + 2x_3 - x_5 + 5 = 0 \end{cases}$$

відносно змінних x_2, x_4 та перевірити правильність розв'язання при $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_5 = 5$.

Розв'язання

Складемо початкову таблицю:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	1
0 =	2	1*	-3	1*	0	1
0 =	0	-3*	2	0	-1	5

Зробимо послідовно два кроки: спочатку змінну x_2 переведемо в стовпець залежних змінних, а потім теж саме зробимо зі змінною і x_4. Наступні дві таблиці відповідають результатам першого та другого кроків.

	x_1	x_3	x_4^*	x_5	1
$x_2 =$	-2	3	-1	0	-1
0 =	6	-7	**3***	-1	8

	x_1	x_3	x_5	1
$x_2 =$	0	2/3	-1/3	5/3
$x_4 =$	-2	7/3	1/3	-8/3

Шукане рішення: $\begin{cases} x_2 = \dfrac{2}{3}x_3 - \dfrac{1}{3}x_5 + \dfrac{5}{3}, \\ x_4 = -2x_1 + \dfrac{7}{3}x_3 + \dfrac{1}{3}x_5 - \dfrac{8}{3}. \end{cases}$

Перевірка правильності знайденого рішення. Підставимо $x_1 = 1,\ \ x_2 = 3,$ $x_5 = 5$ в шукане рішення. Одержимо: $x_2 = 2;\ \ x_4 = 4.$ Тепер значення всіх змінних підставляємо у початкову систему:

$$\begin{cases} 2 + 2 - 3 \cdot 3 + 4 + 1 = 0\ , \\ -3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 5 + 5 = 0\ . \end{cases}$$

Система рівнянь перетворилась в систему тотожностей. Отже рішення знайдено правильно.

1.2. Лінійне програмування

1.2.1. Математичне формулювання задачі лінійного програмування та її розв’язання графічним методом

Будь-яка задача математичного програмування може бути подана *в змістовній (вербальній) постановці* або у вигляді *математичної моделі*.

Для одержання *математичної моделі* задачі за її змістовним описом необхідно:

1. Визначити *невідомі* – компоненти вектору $\overline{x}$.
2. Сформувати *функцію цілі* $y(\overline{x})$.
3. Визначити *обмеження* – область припустимих рішень $\boldsymbol{\Omega}$.

Якщо цільова функція та обмеження задачі є *лінійними*, а всі змінні є невід’ємні, то така задача зветься задачею лінійного програмування (ЗЛП).

Загальна задача лінійного програмування формулюється в такий спосіб: *знайти оптимум лінійної функції цілі* $y(\overline{x})$, *якщо обмеження* $f_i(\overline{x})$ *лінійні й змінні* $\overline{x}$ *невід’ємні.*

Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{1.14}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} \mathbf{A}_1\,\bar{x} \le \bar{b}_1, & (1.15) \\ \mathbf{A}_2\,\bar{x} = \bar{b}_2, & (1.16) \\ \mathbf{A}_3\,\bar{x} \ge \bar{b}_3, & (1.17) \end{cases}$$

$$\bar{x} \ge 0, \tag{1.18}$$

де $\bar{x}$ – n-вимірний вектор дійсних змінних, $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$; $\bar{c}$ – n-вимірний вектор коефіцієнтів функції мети; c_0 – вільний член функції цілі; $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$ відповідно; $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $m_3 \times 1$, відповідно.

Задачу, складену з (1.14), (1.15) і (1.18), називають *стандартною* задачею лінійного програмування у векторно-матричній формі.

Якщо обмеження ЗЛП записані у вигляді *рівностей*, то говорять про *канонічну* ЗЛП. *Канонічна* задача лінійного програмування у векторно-матричній формі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^{\mathrm{T}}\bar{x} + c_0 \to \underset{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}\subset\mathbf{R}^n}{\mathrm{opt}}, \tag{1.19}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \mathbf{A}\bar{x} = \bar{b}, \tag{1.20}$$

$$\bar{x} \ge 0, \tag{1.21}$$

де $\mathbf{A}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\bar{b}$ – вектор вільних членів розмірності $m \times 1$.

Канонічна, або *основна* задача лінійного програмування в розгорнутій формі має такий вигляд:

$$y(x_1, x_1, \ldots x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \to \underset{\mathrm{x}_j\in\mathbf{\Omega}}{\mathrm{opt}}, \tag{1.22}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.23}$$

$$x_j \geq 0, \quad (j=\overline{1,n}) \ . \qquad (1.24)$$

Перетворення стандартної форми ЗЛП до канонічної виконується в такий спосіб:

1. Обмеження-нерівність типу "≤" можна перетворити в обмеження-рівність додаванням до її лівої частини додаткової невід'ємної змінної, наприклад, $x_1 - x_3 + x_5 \leq 3$ => $x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3$;

2. Обмеження-нерівність типу "≥" перетвориться в обмеження-рівність відніманням з її лівої частини додаткової невід'ємної змінної, наприклад, $x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8$ => $x_1 + x_4 - 5x_5 - x_6 = 8$

Задача мінімізації зводиться до задачі максимізації шляхом множення цільової функції $y(\bar{x})$ на –1, тобто задача { $y(\bar{x}) \to \min$ } перетворюється до задачі { $-y(\bar{x}) \to \max$ }.

Таким чином, задачу лінійної оптимізації (1.14) – (1.18) завжди можна перетворити в задачу (1.19) – (1.21) і навпаки.

Графічний метод є найбільш простим і наочним методом розв'язання ЗЛП. Він застосовується для розв'язання задач ЛП з двома змінними, заданими в стандартній формі або для розв'язання задач ЛП з m+2 змінними, які подані у канонічній формі, де m – число лінійно незалежних обмежень-рівностей.

Припустима множина рішень задачі лінійного програмування Ω утворює опуклий багатокутник, на границі якого функція цілі $y^* = y(\bar{x}^*)$ досягає свого оптимуму.

Найшвидші зміни цільової функції *y(x)* здійснюються в напрямку вектора $\bar{c} = \text{grad}\ y = \begin{bmatrix} \partial y / \partial x_1 \\ \partial y / \partial x_2 \end{bmatrix}$. Координатами вектора $\bar{c}$ є коефіцієнти лінійної цільової функції $y(\bar{x})$.

Для розв'язання задачі графічним методом, ЗЛП необхідно попередньо привести до стандартної форми запису, тобто:

$$y(\bar{x}) = [c_1 \quad c_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \underset{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}\subset\mathbf{R}^n}{opt} \ , \qquad (1.25)$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad (1.26)$$

$$\bar{x} \ge 0. \qquad (1.27)$$

Алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування *графічним методом,* як правило, включає наступні етапи:

1. Приведення математичної моделі задачі до виду (1.25) – (1.27).

2. Побудова багатокутника припустимих рішень:

a) побудова прямих, обумовлених нерівностями (1.26), тобто $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1,m}$; $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$. Для побудови i-ї прямої $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ знаходять пару точок $\begin{bmatrix} 0 \\ b_i/a_{i2} \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} b_i/a_{i1} \\ 0 \end{bmatrix}$;

b) знаходження півплощин, обумовлених кожним з обмежень задачі (1.26), (1.27). Кожна побудована пряма поділяє площину на дві півплощини. Всі точки однієї півплощини задовольняють відповідному обмеженню задачі, а іншої – ні. Беруть будь-яку точку площини $\bar{x}_0^{\mathrm{T}}$, наприклад $\bar{x}_0^{\mathrm{T}} = [0 \quad 0]$, і перевіряємо для неї виконання відповідної нерівності $a_{i1}x_{01} + a_{i2}x_{02} \le b_i$. Якщо нерівність виконується, то півплощина з точкою $\bar{x}_0^{\mathrm{T}}$ є шуканою півплощиною. Якщо не виконується – шуканою є друга півплощина. Всі знайдені півплощини виділяють штрихуванням;

c) виділення багатокутника припустимих рішень. Перетинання знайдених півплощин утворює багатокутник припустимих рішень $\mathbf{\Omega}$.

3. Знаходження оптимального плану $\bar{x}^*$ і відповідного оптимуму y^*:

a) побудова прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$, що проходить через багатокутник припустимих рішень $\mathbf{\Omega}$, де y_0 – довільна константа. Пряма $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$, що перетинає багатокутник припустимих рішень, визначає точки, для яких цільова функція приймає значення y_0;

b) побудова вектора $\bar{c}^{\mathrm{T}} = [c_1 \quad c_2]$;

c) переміщення прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ в напрямку вектора $\bar{c}$ до границі області $\mathbf{\Omega}$ (задача максимізації) або у зворотному напрямку вектора $\bar{c}$ (задача мінімізації);

d) визначення координат граничної точки $\bar{x}^*$ шляхом розв'язання системи з двох рівнянь. Ця система утворюється з рівнянь прямих (сторін багатокутника припустимих рішень), що перетинаються в граничній точці;

e) обчислення цільової функції в точці $\bar{x}^*$, тобто знаходження шуканого оптимуму $y\left(\bar{x}^*\right)$.

При розв'язанні ЗЛП можливі чотири випадки: єдине рішення (рис. 1.1), незліченна множина рішень (відрізок АВ на рис. 1.2), необмежена область припустимих рішень (рис. 1.3) і відсутність рішення через несумісність системи обмежень (рис. 1.4).

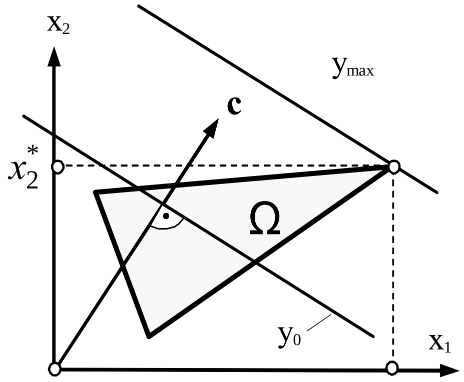


Рис. 1.1

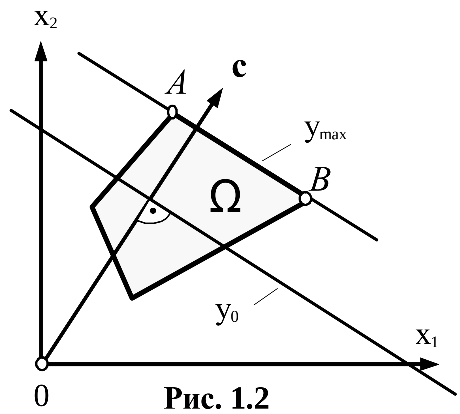


Рис. 1.2

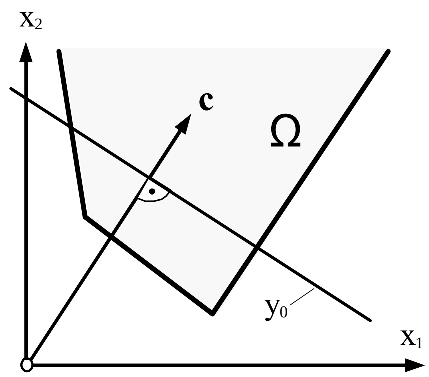


Рис. 1.3

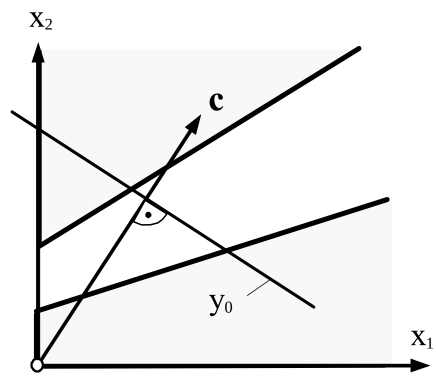


Рис. 1.4

Приклад 1.5

На птахофермі розводять курчат і каченят. Для забезпечення нормальних умов розведення птахів використовують два види кормів *A* і *B*. На відгодівлю одного десятка каченят потрібно 2 *т* корму *A* і 5 *т*. корму *B*. На відгодівлю одного десятка курчат потрібно 4 *т* корму *A* і 9 *т* корму *B*. В розпорядженні птахоферма є 16 *т* корму *A* і 45 *т* корму *B*. Відгодівля менш 9 десятків пташенят вважається нерентабельним. Попит на курчат перевищує попит на каченят у три рази. Очікувана ціна на десяток каченят становить 12 *грн.*, а на десяток курчат – 10 *грн*. Визначити кількість вирощених каченят і курчат, продаж яких забезпечить максимальний прибуток для птахоферми.

Розв'язання

Спочатку складемо математичну модель задачі:

1. Визначимо змінні задачі. Вираз «визначити кількість вирощених каченят і курчат» означає, що змінних буде дві: x_1– кількість десятків каченят, x_2– кількість десятків курчат.

2. Сформулюємо цільову функцію. Вираз «продаж яких забезпечить максимальний прибуток» означає, що функція цілі – це функція прибутку, тобто загальна кількість грошей, отриманих від продажу курчат і каченят. Математичний запис цільової функції має вигляд $y(x) = 12x_1 + 10x_2$. Той же вираз конкретизує кінцеву ціль задачі – необхідно знайти максимальне значення функції прибутку. Останнє відповідає запису $y(x) = 12x_1 + 10x_2 \to \max$.

3. Сформуємо обмеження. Перше обмеження пов'язано з кормом виду *A*. Звісно, що на розведення десятка каченят потрібно 4 *т* цього корму, а на розведення десятка курчат – 2 *т*. Крім того, на розведення всіх птахів можна витратити не більше 16 *т* корму *A*. Тому перше обмеження ідентифікується нерівністю $4x_1 + 2x_2 \le 16$. Друге обмеження пов'язано з кормом виду *B* та визначається аналогічно, а саме: $5x_1 + 9x_2 \le 45$. Третє обмеження пов'язано з попитом («попит на курчат перевищує попит на каченят у три рази») і рентабельністю розведення каченят й курчат («відгодівля менш 9 десятків пташенят вважається нерентабельною»). Тому третє обмеження відповідає нерівності $x_1 + 3x_2 \ge 9$. Четверте та п'яте обмеження випливають з того, що кількість курчат чи пташенят не може бути від'ємною, тобто: $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Таким чином, одержимо математичну модель задачі лінійного програмування:

$$y = 12x_1 + 10x_2 \to \max_{\bar{x} \in \boldsymbol{\Omega}},$$

$$\boldsymbol{\Omega}: \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases} \tag{1.28}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = 1,2.$$

Це стандартна розгорнута алгебраїчна форма запису ЗЛП. Можна помітити, що вона відрізняється від вимог запису (1.25) – (1.27): третє обмеження замість нерівності типу «$\le$» має нерівність типу «$\ge$». Для приведення алгебраїчної форми запису до матричного потрібно щоб всі нерівності були одного знака, тому третю нерівність помножимо на -1:

$$y(\bar{x}) = [12 \quad 10] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_2 \to \max_{\bar{x} \in \boldsymbol{\Omega}},$$

$$\boldsymbol{\Omega}: \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 9 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 16 \\ 45 \\ -9 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} \ge 0.$$

Останні перетворення призвели до стандартної матричної форми запису ЗЛП.

Для приведення стандартної форми (1.28) до канонічного необхідно всі нерівності призвести до рівностей, для цього в перше обмеження додамо змінну x_3, в друге – x_4, а з третього віднімемо x_5.

Канонічна алгебраїчна форма запису ЗЛП має вигляд

$$y = 12x_1 + 10x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ 5x_1 + 9x_2 + x_4 = 45, \\ x_1 + 3x_2 - x_5 = 9, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Тепер запишемо ЗЛП у канонічній матричній формі:

$$y(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \to \max_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 45 \\ 9 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} \geq 0.$$

Розв'яжемо задачу «про курчат і каченят» графічним методом. Згідно з алгоритмом метода моєму наступну послідовність дій:

1. Приведення задачі до стандартної алгебраїчної форми ЗЛП вже здійснено. Результатом приведення є математична модель (1.28):

$$y = 12x_1 + 10x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \quad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45, \\ x_1 + 3x_2 \geq 9, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2.$$

Примітка. Для графічного методу, що оперує зі стандартною алгебраїчною формою запису ЗЛП, наявність в математичній моделі нерівностей типу «≥» не має суттєвого значення.

2. Побудова багатокутника припустимих рішень:

a) спочатку побудуємо прямі, що обумовлені обмеженнями задачі, тобто прямі $4x_1 + 2x_2 = 16$, $5x_1 + 9x_2 = 45$ і $x_1 + 3x_2 = 9$. Перша пройде через точки $\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix}0\\8\end{bmatrix}$. Друга – через точки $\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix}$. Третя – через точки $\begin{bmatrix}9\\0\end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$;

b) визначимо півплощини, які формують багатокутник припустимих рішень. У кожну нерівність обмежень задачі підставимо, наприклад, координати точки початку координат $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ і визначимо, чи належить ця точка шуканій півплощині. Перша нерівність $4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 < 16$ задовольняється, отже, штрихувати треба ту півплощину, до якої належить початок координат. Друга нерівність $0 < 45$, теж задовольняється, третя нерівність $0 > 9$ не задовольняється, отже штрихувати треба ту півплощину, до якої не належить початок координат. Останнє обмеження $(x_s \geq 0, i = 1,2)$ означає, що багатокутник припустимих рішень розташовується в першій чверті координатної площини;

c) виділимо багатокутник припустимих рішень. Це фігура *ABCD* на рис. 1.5.

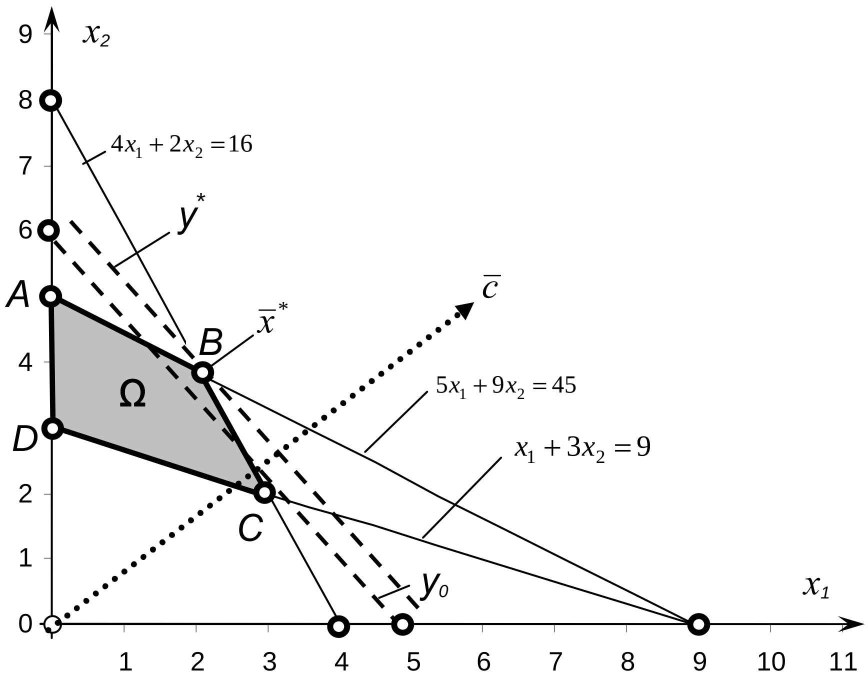


Рис. 2.5

3. Пошук оптимального плану та максимуму цільової функції:

a) побудуємо пряму $y_0 = 12x_1 + 10x_2 = 60$. На рис. 1.5 вона показана пунктирною лінією y_0 можна провести через точки $\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$.

b) побудуємо вектор $\bar{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}$, Вектор $\bar{c}$ завжди виходить з початку координат є перпендикулярним до лінії рівня y_0.

c) знайдемо точку $\bar{x}*$, що є оптимальним рішенням задачі, для чого лінію y_0 перемістимо вдовж вектора $\bar{c}$ до точці торкання з багатокутником *ABCD*. Шукана точка $\bar{x}*$ співпадає з точкою *B*.

d) знайдемо координати точки $\bar{x}*$ як рішення системи рівнянь. Система складається з рівнянь прямих, що перетинаються в точці *B*: $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 16; \\ 5x_1 + 9x_2 = 45. \end{cases}$

Розв'язавши систему, одержимо: $x_2 = 3{,}8$; $x_1 = 2{,}1$; $\bar{x}* = \begin{bmatrix} 2{,}1 \\ 3{,}8 \end{bmatrix}$.

e) обчислимо значення цільової функції в точці $\bar{x}*$:

$$y* = 12 \cdot 2{,}1 + 10 \cdot 3{,}8 = 63{,}2.$$

Таким чином, птахоферма одержить максимальний прибуток у розмірі 63,2 *грн*., якщо виростить 2,1 десятки каченят і 3,8 десятки курчат.

Приклад 1.6

З двох продуктів складається суміш. До складу суміші повинне входити не менше 16 *од*. хімічної речовини *A*, не більше 18 *од*. речовини *B* та не менше 7 *од*. речовини *C*. При виготовленні продукту I хімічні речовини *A*, *B* і C змішуються в співвідношенні 4:3:1 відповідно, а при виготовленні продукту II – 2:3:2 відповідно. Вартість одиниці продукту I становить 2 *грн*., а продукту II – 3 *грн*. Скласти найбільш дешеву суміш.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі:

1. Визначимо змінні задачі. З виразу «З двох продуктів складається суміш» випливає, що кількість змінних дорівнює двом, а саме: x_1 – кількість продукту I, x_2 – кількість продукту II.

2. Сформуємо функцію цілі. З виразу «найбільш дешеву суміш» випливає, що функція цілі – це функція грошових витрат, яку треба *мінімізувати*.

Спираючись на фразу «Вартість одиниці продукції становить 2 *грн*. для продукту I і 3 *грн*. для продукту II», сформуємо аналітичний запис цільової функції:

$$y = 2x_1 + 3x_2 .$$

3. Сформуємо обмеження. Подамо вихідні данні у вигляді таблиці:

Хімічна речовина	Частка речовини в		Знак нерівності	Обмеження на кількість хім. речовини
	продукті I (змінна x_1)	продукті II (змінна x_2)		
A	4/8	2/7	не менше , ≥	16
B	3/8	3/7	не більше, ≤	18
C	1/8	2/7	не менше, ≥	7

На підставі даних у таблиці сформуємо три обмеження:

$$\begin{cases} \frac{4}{8}x_1 + \frac{2}{7}x_2 \geq 16, \\ \frac{3}{8}x_1 + \frac{3}{7}x_2 \leq 18, \\ \frac{1}{8}x_1 + \frac{2}{7}x_2 \geq 7, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 14x_1 + 8x_2 \geq 448, \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 336, \\ 7x_1 + 16x_2 \geq 392. \end{cases}$$

Ще одне обмеження випливає з умови, що кількість продуктів не може бути від'ємною, тобто $x_i \geq 0, \quad i = 1,2$.

Таким чином, одержуємо математичну модель задачі лінійного програмування:

$$y = 2x_1 + 3x_2 \to \min_{x \in \mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} 14x_1 + 8x_2 \geq 448, \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 336, \\ 7x_1 + 16x_2 \geq 392, \end{cases} \tag{1.29}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2.$$

Це є стандартна алгебраїчна форма запису ЗЛП.

Для приведення алгебраїчної форми запису до матричної потрібно, щоб всі нерівності були одного знака, тому другу нерівність помножимо на –1:

$$y(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_2 \to \min_{x \in \mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{bmatrix} 14 & 8 \\ -7 & -8 \\ 7 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 448 \\ -336 \\ 392 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} \geq 0.$$

Це є стандартна матрична форма запису ЗЛП.

Для приведення стандартної форми до канонічного виду необхідно всі нерівності привести до рівностей. Для цього введемо додаткові невід'ємні змінні x_3, x_4, x_5. Змінну x_3 віднімемо від першої нерівності, x_4 додамо до другої та x_5 віднімемо від третьої. В результаті наведених перетворень одержимо канонічну алгебраїчну форму запису ЗЛП

$$y = 2x_1 + 3x_2 \to \min_{x \in \mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} 14x_1 + 8x_2 - x_3 = 448, \\ 7x_1 + 8x_2 + x_4 = 336, \\ 7_1 + 16x_2 - x_5 = 392, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Тепер запишемо ЗЛП у канонічній матричній формі:

$$y(\bar{x}) = [2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \to \max_{x \in \mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{bmatrix} 14 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 16 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 448 \\ 336 \\ 392 \end{bmatrix},$$

$$\bar{x} \geq 0.$$

Розв'яжемо задачу графічним методом. Згідно з алгоритмом метода маємо наступну послідовність дій:

1. При розв'язуванні ЗЛП графічним методом зручно скористатися математичною моделлю в стандартній алгебраїчній формі (1.29), а саме

$$y = 2x_1 + 3x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega} ,$$

$$\Omega: \quad \begin{cases} 14x_1 + 8x_2 \geq 448, \\ 7x_1 + 8x_2 \leq 336, \\ 7x_1 + 16x_2 \geq 392, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1,2.$$

2. Побудуємо багатокутник припустимих рішень

a) з перших трьох нерівностей визначимо рівняння прямих:

$$14x_1 + 8x_2 = 448,$$

$$7x_1 + 8x_2 = 336,$$

$$7x_1 + 16x_2 = 392.$$

Побудуємо ці прямі. Перша проходить через точки $\begin{bmatrix} 32 \\ 0 \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} 0 \\ 56 \end{bmatrix}$. Друга – через точки $\begin{bmatrix} 48 \\ 0 \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} 0 \\ 42 \end{bmatrix}$. Третя – через точки $\begin{bmatrix} 56 \\ 0 \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} 0 \\ 24,5 \end{bmatrix}$.

b) визначимо півплощини, які формують багатокутник припустимих рішень. Як контрольну точку для визначення півплощин будемо брати початок координат. Оскільки перша та третя нерівність не виконуються не виконується, то виділяємо півплощини по інші сторони від відповідних прямих. Для другої нерівності, яка не порушується при підстановці координат контрольної точки, виділяємо півплощину, до якої належить початок координат. Останнє обмеження визначає, що багатокутник припустимих рішень лежить тільки в першій чверті координатної площини;

c) виділимо багатокутник припустимих рішень. Це фігура *ABC* на рис. 1.6.

3. Знайдемо оптимальний план:

a) побудуємо пряму $2x_1 + 3x_2 = 60$, тобто лінію рівня при $y_0 = 300$. На рис. 1.6 вона показана тонкою лінією, яка проведена через точки $\begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix}$ і $\begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$;

b) побудуємо вектор $\bar{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

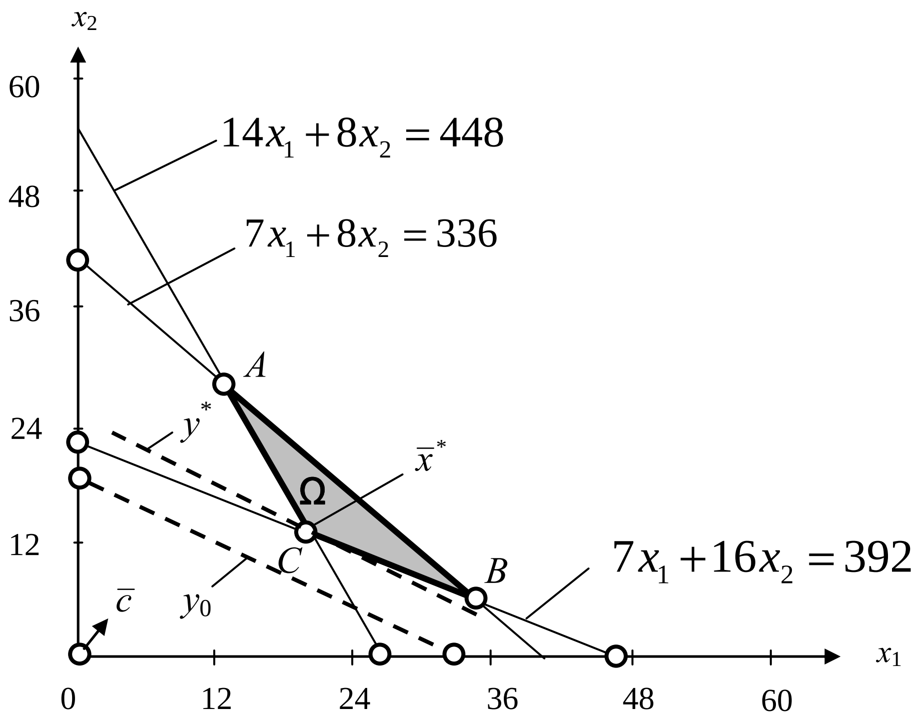


Рис. 1.6

c) знайдемо мінімальне значення цільової функції за допомогою паралельного переміщення y_0 в напрямку вектора $\bar{c}$ до першого торкання області припустимих рішень Ω (останнє торкання – це максимальне значення). Таким чином, знаходимо що мінімум цільової функції буде в точці *C* трикутника ABC.

d) знайдемо координати $\bar{x}*$. За графіком ми одержимо лише наближене значення, тому необхідно розв'язати систему рівнянь, щоб знайти координати цієї точки. Розв'язуючи систему $\begin{cases} 14x_1 + 8x_2 = 448; \\ 7x_1 + 16x_2 = 392, \end{cases}$ одержимо $\bar{x}* = \begin{bmatrix} 24 \\ 14 \end{bmatrix}$;

e) обчислимо значення цільової функції в точці $\bar{x}*$:

$$y* = 2 \cdot 24 + 3 \cdot 14 = 90.$$

Таким чином, найдешевша суміш повинна складатися з 24 *од*. речовини I й 14 *од*. речовини II та коштувати 90 *грн*.

1.2.2. Побудова двоїстої задачі лінійного програмування. Симплекс-метод

Кожній задачі лінійного програмування можна певним чином поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, що називають *двоїстою* стосовно даної (вихідної) задачі.

Загальні правила побудови двоїстих пар задач лінійного програмування

1. В математичних моделях задач обмеження-нерівності треба записувати зі знаком відношення "$\le$" при максимізації та зі знаком "$\ge$" при мінімізації.

2. Кожному i-му обмеженню вихідної задачі повинна відповідати змінна z_i двоїстої задачі та, навпаки, кожному j-му обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна x_j вихідної задачі.

3. Кожному i-му обмеженню-нерівності вихідної задачі повинна відповідати у двоїстій задачі умова невід'ємності змінної $(z_i \ge 0)$, а рівності – змінна z_i без обмежень на знак (будь-якого знака). Навпаки, невід'ємності змінної $x_j \ge 0$ відповідає у двоїстій задачі j-е обмеження-нерівність, а змінній довільного знака – рівність.

4. Матриці коефіцієнтів систем обмежень двоїстої пари задач повинні бути взаємно транспоновані, тобто рядок коефіцієнтів a_{ij} в j-м обмеженні двоїстої задачі є стовпцем коефіцієнтів при x_j в обмеженнях вихідної задачі, та навпаки.

5. Вільні члени обмежень однієї із задач повинні бути коефіцієнтами при відповідних змінних у цільовій функції іншої задачі. При цьому задача максимізації змінюється на задачу мінімізації, та навпаки.

Симплекс-метод, що був розроблений Данцигом в 1947 році, вважається найбільш поширеним методом вирішення ЗЛП. Цей метод дозволяє на кожному кроці переходити від одного базисного (опорного) рішення до іншого при обов'язковому поліпшенню значення цільової функції, тобто наближенню до оптимального значення. Як наслідок оптимальне рішення (якщо воно існує) знаходять за кінцеве число кроків. Існує велика множина модифікацій симплекс-методу. Тут приводиться симплекс-метод, що дозволяє розв'язувати одночасно вихідну й двоїсту задачі.

Якщо вихідна, або двоїста, або обидві задачі лінійного програмування разом записані в стандартній формі, то їх треба привести до *канонічної* форми, шляхом введення додаткових змінних $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ у вихідну та $z_{m+1}, z_{m+2}, \dots, z_{m+n}$ у двоїсту задачі відповідно. В наслідок цих перетворень одержимо вихідну і двоїсту задачі, а саме:

– вихідна задача

$$y(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{\bar{x}\in\Omega}, \tag{1.30}$$

$$\Omega: \quad f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{1.31}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n+m};$$

– двоїста задача

$$d\left(\bar{z}\right)=\sum_{i=1}^{m} b_i \cdot z_i \rightarrow \min_{\bar{z}\in \mathbf{P}}, \qquad (1.32)$$

$$\mathbf{P}: \quad \begin{aligned} & g_j=\sum_{i=1}^{m} a_{ji} \cdot z_i - z_{m+j} = c_j, \quad j=\overline{1,n}, \\ & z_i \geq 0, \quad i=\overline{1,m+n}. \end{aligned} \qquad (1.33)$$

Примітка. Потрібно враховувати, що розв’язання задачу симплекс-методом можливо лише тоді, коли кожну *i*-у додаткову змінну вихідної задачі можна представити у вигляді $x_{n+i}=b_i-\left(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\right)$, а кожну *j*-у додаткову змінну двоїстої задачі можна представити у вигляді $z_{m+j}=-c_j-\left(-a_{1j}z_1-a_{2j}z_2-\ldots-a_{nj}x_n\right)$, де $b_i>0$ та $c_j>0$;

Змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ вихідної задачі та змінні $z_{m+1}, z_{m+2}, \cdots, z_{m+n}$ двоїстої задачі вибираються як *базисні* (залежні), а інші змінні $x_1, x_2, \cdots, x_n$ вихідної та $z_1, z_2, \cdots, z_m$ двоїстої вважаються *вільними* (незалежними) і *прирівнюються* до нуля. Тоді перше опорне (базисне) рішення вихідної задачі буде

$$\bar{x}_0^T=\left[x_1=0 \quad \ldots \quad x_n=0 \quad x_{n+1}=b_1 \quad x_{n+2}=b_2 \quad \ldots \quad x_{n+m}=b_m\right],$$

а перше опорне (базисне) рішення двоїстої задачі буде:

$$\bar{z}_0^T=\left[z_1=0 \quad \ldots \quad z_m=0 \quad x_{m+1}=-c_1 \quad x_{m+2}=-c_2 \quad \ldots \quad x_{m+n}=-c_n\right].$$

Після отримання першого опорного рішення визначають, чи є воно оптимальним (критерій оптимальності буде визначено нижче). Якщо оптимум не досягнуто, то переходять до нового опорного рішення. Для цього потрібно визначити вільну змінну, яку потрібно ввести в базис і базисну змінну, яку потрібно вивести з числа базисних змінних.

Після отримання нового опорного рішення його також перевіряють на оптимальність. Якщо критерій оптимуму виконується, то останнє опорне рішення є оптимальним.

Всі розрахунки зручно виконувати в спеціальній симплекс-таблиці:

<table>
<tr><td rowspan="2">В
(вільні)</td><td>Б (базові)</td><td>z_{m+1}</td><td>z_{m+2}</td><td>$\ldots$</td><td>z_{m+n}</td><td>$d\left(\bar{z}\right)\rightarrow min$</td><td rowspan="2">Симпл. відн. θ</td></tr>
<tr><td>В (вільні)
Б (базові)</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$\ldots$</td><td>x_n</td><td>вільні. чл.</td></tr>
<tr><td>$-z_1$</td><td>x_{n+1}</td><td>$t_{11}=a_{11}$</td><td>$t_{12}=a_{12}$</td><td>$\ldots$</td><td>$t_{1n}=a_{1n}$</td><td>$t_{1,n+1}=b_1$</td><td>θ_1</td></tr>
<tr><td>$-z_2$</td><td>x_{n+2}</td><td>$t_{21}=a_{21}$</td><td>$t_{22}=a_{22}$</td><td>$\ldots$</td><td>$t_{2n}=a_{2n}$</td><td>$t_{2,n+1}=b_2$</td><td>θ_2</td></tr>
<tr><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td></td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td><td>$\vdots$</td></tr>
<tr><td>$-z_m$</td><td>x_{n+m}</td><td>$t_{m1}=a_{m1}$</td><td>$t_{m2}=a_{m2}$</td><td>$\ldots$</td><td>$t_{mn}=a_{mn}$</td><td>$t_{m,n+1}=b_m$</td><td>θ_m</td></tr>
<tr><td>вільні. чл.</td><td>$y\left(\bar{x}\right)\rightarrow max$</td><td>$t_{m+1,1}=-c_1$</td><td>$t_{m+1,2}=-c_2$</td><td>$\ldots$</td><td>$t_{m+1,n}=-c_n$</td><td>$t_{m+1,n+1}=0$</td><td></td></tr>
</table>

Критерій оптимальності: мінімум цільової функції вважається досягнутим, якщо для деякого опорного рішення всі*і оцінки* $t_{m+1,j} \le 0 \ (j = \overline{1,n})$, а максимум цільової функції вважається досягнутим, якщо для деякого опорного рішення *всі оцінки* $t_{m+1,j} \ge 0 \ (j = \overline{1,n})$.

***Алгоритм симплекс-методу*:**

0. Заповнюють вихідну симплекс-таблицю.

1. Перевіряють, чи виконується умова оптимуму (критерій оптимальності). Якщо виконується, то отримане опорне рішення є оптимальним. Якщо не виконується, переходять до наступного пункту.

2. Знаходять напрямний стовпець (r-й стовпець). Серед «неправильних» оцінок ($t_{m+1,j} > 0$ для задачі мінімізації, $t_{m+1,j} < 0$ для задачі максимізації) вибирають максимальну за модулем оцінку $t_{m+1,r} = \max\limits_{j} \left| t_{m+1,j} \right|, \ j = \overline{1,n}$.

3. Знаходять напрямний рядок (k-й рядок). Для всіх $a_{ir} > 0$ знаходять симплексні відносини $\theta_i = \dfrac{b_i}{a_{ir}}$. Напрямним буде той рядок k, для якого θ_i буде мінімальним: $\theta_k = \min\limits_{i, a_{ir} > 0} \{\theta_i\}$. На перетинанні r-го стовпця та k-го рядка знаходиться *розв'язний* елемент t_{kr}.

Якщо всі компоненти $t_{ir} \ (i = \overline{1,m})$ напрямного стовпця від'ємні ($t_{ir} \le 0$) то лінійна форма задачі необмежена на багатокутнику припустимих рішень, і розрахунки на цьому закінчуються. Така задача не має рішення.

4. Знаходять нове опорне рішення. Для цього міняють місцями пари змінних (x_r, z_{m+r}) на пару змінних (x_{n+k}, z_k). Елементи вихідної таблиці $t_{ij} \ \left(i = \overline{1, m+1}, \ j = \overline{1, n+1}\right)$ перераховують в елементи $t_{ij}^{н} \ \left(i = \overline{1, m+1}, \ j = \overline{1, n+1}\right)$ нової таблиці за правилами жорданових виключень:

– розв'язний елемент: $t_{kr}^{н} = \dfrac{1}{t_{kr}}$;

– елементи напрямного рядка: $\underset{j \ne r}{t_{kj}^{н}} = \dfrac{t_{kj}}{t_{kr}}$;

– елементи напрямного стовпця: $\underset{i \ne k}{t_{ir}^{н}} = -\dfrac{t_{ir}}{t_{kr}}$;

– елементи таблиці, що залишилися: $\underset{\substack{i \ne k \\ j \ne r}}{t_{ij}^{н}} = t_{ij} - \dfrac{t_{ir} \cdot t_{kj}}{t_{kr}}$.

5. Переходять до пункту 1.

Сформулюємо ознаки оптимальності двоїстої пари задач:

1. Плани $\bar{x}^*$ і $\bar{z}^*$ оптимальні, якщо $y^* = d^*$.

2. Плани $\bar{x}^*$ і $\bar{z}^*$ оптимальні, якщо всі добутки сполучених умов для цих планів дорівнюють 0.

Запишемо сполучені умови:

1 група: $(b_i - (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)) \cdot z_i = 0, \left(i = \overline{1, m}\right),$

2 група $(-c_j - \left(- a_{1j}z_1 - a_{2j}z_2 - \ldots - a_{nj}x_n\right)) \cdot x_j = 0, \left(j = \overline{1, n}\right).$

Приклад 1.7. Нехай математична модель задачі лінійного програмування має вигляд:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} f_1 = -2x_1 + x_2 \le 3, \\ f_2 = x_1 - 2x_2 \le 5, \\ f_3 = x_1 + x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0; \quad j = 1,2.$$

Треба розв'язати цю задачу та двоїсту до неї за спеціальним симплекс-методом.

Розв'язання

Побудова двоїстої задачі:

1. Правило 1 виконується, тому що задача максимізації має обмеження-нерівності типу «$\le$ ».

2. Вихідна задача має три обмеження f_1, f_2, f_3, тому двоїста задача буде мати три змінні z_1, z_2, z_3, а оскільки вихідна задача має 2 змінні x_1, x_2, то двоїста задача буде мати два обмеження g_1, g_2.

3. Всі обмеження вихідної задачі є нерівності, тому всі змінні двоїстої задачі є невід'ємними, а всі обмеження двоїстої задачі – нерівності. Вихідна та двоїста задачі складають *симетричну* пару двоїстих задач;

4. Матриця коефіцієнтів вихідної задачі має вигляд: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, тому матриця коефіцієнтів двоїстої задачі відповідно буде $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

5. Коефіцієнти цільової функції вихідної задачі $\begin{bmatrix}2 & 5\end{bmatrix}$ стануть вільними членами двоїстої задачі $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$, а вільні члени вихідної задачі $\begin{bmatrix}3\\5\\6\end{bmatrix}$ стануть коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі $\begin{bmatrix}3 & 5 & 6\end{bmatrix}$.

Отже двоїста задача набуває вигляду

$$d(\bar{z}) = 3z_1 + 5z_2 + 6z_3 \to \min_{\bar{z}\in \mathbf{P}},$$

$$\mathbf{P}: \quad \begin{cases} g_1 = -2z_1 + z_2 + z_3 \ge 2, \\ g_2 = z_1 - 2z_2 + z_3 \ge 5, \end{cases}$$
$$z_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Для розв’язання вихідної й двоїстої задачі застосуємо спеціальний симплекс-метод, який вимагає перетворення вихідної задачі до вигляду (1.30) – (1.31), а двоїстої – до вигляду (1.32) – (1.33). Для виконання цієї вимоги введемо додаткові змінні x_3, x_4, x_5 у вихідну задачу та додаткові змінні $-z_4, -z_5$ у двоїсту задачу. Перевіримо умову можливості розв'язання задачі симплексом-методом:

$$x_3 = 3 - (-2x_1 + x_2),$$
$$x_4 = 5 - (x_1 - 2x_2),$$
$$x_5 = 6 - (x_1 + x_2),$$
$$z_4 = -2 - (2z_1 - z_2 - z_3),$$
$$z_5 = -5 - (-z_1 + 2z_2 - z_3).$$

Отже, цю задачу можна розв’язати симплекс-методом.

Будуємо симплекс таблицю:

Б		z_4	z_5	$d(\bar{z}) \to \min$	Симплекс-віднош.
В	**В** / **Б**	x_1	x_2	Вільні чл.	
$-z_1$	x_3	-2	1	3	$3/1$
$-z_2$	x_4	1	-2	5	-
$-z_3$	x_5	1	1	6	$6/1$
Вільні чл.	$y(\bar{x}) \to \max$	-2	-5	0	

Перевіряємо критерій оптимальності: -2<0, -5<0. Отже знайдене рішення $\bar{x}^{\mathrm{т}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ не є оптимальним.

Виділимо напрямний стовпець, в якому знаходиться максимальний за модулем від'ємний елемент в останньому рядку, тобто стовпець з x_2.

Претендентами на напрямний рядок є перший і третій рядки (другий не може бути, оскільки –2 < 0). За напрямний вибираємо рядок з найменшим симплекс-відношенням, тобто 1-й.

Розв'язним елементом буде 1. Його позначено сірим тлом.

Будуємо нову симплекс-таблицю:

Б		z_4	z_1	$d(\bar{z}) \to \min$	Симплекс-відношення
В	**В** / **Б**	x_1	x_3	Вільн. чл.	
$-z_5$	x_2	-2	1	3	-
$-z_2$	x_4	-3	2	11	-
$-z_3$	x_5	3	-1	3	$3/3$
Вільн. чл.	$y(\bar{x}) \to \max$	-12	5	15	

Для нового опорного рішення $\bar{x}^{\mathrm{т}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 11 & 3 \end{bmatrix}$ критерій оптимальності знову не виконується: -12 < 0, хоча значення цільової функції поліпшилось: зросло від 0 до 15.

Вибираємо напрямній стовпець, напрямний рядок і будуємо нову таблицю:

Б		z_3	z_1	$d(\bar{z}) \to \min$
В	**В** / **Б**	x_5	x_3	Вільн. чл.
$-z_5$	x_2	2/3	1/3	5
$-z_2$	x_4	1	1	14
$-z_4$	x_1	1/3	-1/3	1
Вільн. чл.	$y(\bar{x}) \to \max$	4	1	27

Нове опорне рішення $\bar{x}^{\mathrm{т}} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 14 & 0 \end{bmatrix}$ є оптимальним, тому що в останньому рядку таблиці немає від'ємних оцінок. Отже шукані рішення вихідної та двоїстої задачі мають відповідно наступні значення:

$$\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad y^* = 27; \qquad \bar{z}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad d^* = 27.$$

Перевірка

Згідно з теорією ознак оптимальності двоїстої пари задач:

– плани $\overline{x}^*$ і $\overline{z}^*$ оптимальні, якщо $y^* = d^*$;

– плани $\overline{x}^*$ і $\overline{z}^*$ оптимальні, якщо всі добутки сполучених умов для цих планів дорівнюють 0.

В умовах прикладу $y^* = d^* = 27$ і всі сполучені умови дорівнюють нулю:

$$x_1 z_4 = x_1(-2-(2z_1 - z_2 - z_3)) = 1\cdot(-2-2+0+4) \equiv 0;$$

$$x_2 z_5 = x_2(-5-(-z_1 + 2z_2 - z_3)) = 5\cdot(-5+1-0+4) \equiv 0;$$

$$z_1 x_3 = z_1(3-(-2x_1 + x_2)) = 1\cdot(3+2-5) \equiv 0;$$

$$z_2 x_4 = z_2(5-(x_1 - 2x_2)) = 0\cdot(5-1+5) \equiv 0;$$

$$z_3 x_5 = z_3(6-(x_1 + x_2)) = 4\cdot(6-1-5) \equiv 0.$$

Остаточна відповідь: $\overline{x}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\overline{z}^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $y^* = d^* = 27$.

Приклад 1.8. Розв'язати вихідну і двоїсту ЗЛП спеціальним симплексом-методом, якщо вихідна задача задана математичною моделлю:

$$y(\overline{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\overline{x}\in\mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = -x_1 + 2x_2 \le 5, \\ f_2 = x_1 + x_2 \le 16, \\ f_3 = -2x_1 + x_2 \ge -8, \\ f_4 = 6x_1 - 2x_2 \ge -1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

Побудова двоїстої задачі:

1. Правило 1 не виконується: маємо задачу максимізації, а обмеження налічують нерівності типу «$\ge$ ». Для виконання правила 1 помножимо третє і четверту нерівність на –1, одержимо

$$y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{x \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad \begin{cases} f_1 = -x_1 + 2x_2 \le 5, \\ f_2 = x_1 + x_2 \le 16, \\ f_3 = 2x_1 - x_2 \ge 8, \\ f_4 = -6x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0.$$

2. Вихідна задача має чотири обмеження f_1, f_2, f_3, f_4, тому двоїста задача буде мати чотири змінні z_1, z_2, z_3, z_4. Вихідна задача має дві змінні x_1, x_2, тому двоїста задача буде мати два обмеження g_1, g_2;

3. Всі обмеження вихідної задачі є нерівностями, тому всі змінні двоїстої задачі будуть невід'ємними. Всі змінні вихідної задачі невід'ємні, тому всі обмеження двоїстої задачі будуть нерівностями. Вихідна та двоїста задачі складають симетричну пара двоїстих задач;

4. Матрицею коефіцієнтів системи обмежень є матриця $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$, тому матриця коефіцієнтів двоїстої задачі буде транспонована матриця $\mathbf{A}^{\text{т}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Вектор коефіцієнтів цільової функції вихідної задачі $\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}$ стане вектором вільних членів двоїстої задачі $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, а вектор вільних членів вихідної задачі $\begin{bmatrix} 5 \\ 16 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ – вектором коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі $\begin{bmatrix} 5 & 16 & 8 & 1 \end{bmatrix}$.

Таким чином, одержимо двоїсту задачу

$$d(\bar{z}) = 5z_1 + 16z_2 + 8z_3 + z_4 \to \min_{\bar{z}\in \mathbf{P}},$$

$$\mathbf{P}: \quad \begin{cases} g_1 = -z_1 + z_2 + 2z_3 - 6z_4 \geq 3, \\ g_2 = 2z_1 + z_2 - z_3 + 2z_4 \geq 2, \end{cases} \qquad (1.34)$$

$$z_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4}.$$

Знайдемо оптимальне рішення вихідної (1.34) й двоїстої до неї задачі спеціальним симплексом-методом.

1. У вихідну й двоїсту задачі введемо додаткові змінні x_3, x_4, x_5, x_6 та z_5, z_6 відповідно. Перевіримо умову можливості розв'язання задачі симплекс-методом:

$$f_1 = -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5,$$

$$f_2 = x_1 + 2x_2 + x_4 = 16,$$

$$f_3 = 2x_1 - x_2 + x_5 = 8,$$

$$f_4 = -6x_1 + 2x_2 + x_6 = 1.$$

Всі додаткові змінні введені зі знаком «+» і вільні члени в рівняннях є невід'ємними, тому цю задачу можна розв'язати симплекс-методом.

2. Складемо симплекс-таблицю

<table>
<tr><th colspan="2">Б</th><th>z_5</th><th>z_6</th><th>$d(\bar{z}) \to \min$</th><th rowspan="2">Симплекс-відношення</th></tr>
<tr><th>В</th><th>В
Б</th><th>x_1</th><th>x_2</th><th>Вільні чл.</th></tr>
<tr><td>$-z_1$</td><td>x_3</td><td>–1</td><td>2</td><td>5</td><td>–</td></tr>
<tr><td>$-z_2$</td><td>x_4</td><td>1</td><td>1</td><td>16</td><td>16/1</td></tr>
<tr><td>$-z_3$</td><td>x_5</td><td>2</td><td>–1</td><td>8</td><td>8/2</td></tr>
<tr><td>$-z_4$</td><td>x_6</td><td>-6</td><td>2</td><td>1</td><td>–</td></tr>
<tr><td>Вільні чл.</td><td>$y(\bar{x}) \to \max$</td><td>–3</td><td>–2</td><td>0</td><td></td></tr>
</table>

3. Перевіряємо критерій оптимальності. Оскільки в нижньому рядку є від'ємні оцінки (–3 й –2), перше рішення не є оптимальний. За напрямний стовпець візьмемо перший, де максимальна за модулю від'ємна оцінка становить – 3.

4. Серед претендентів на напрямний рядок можуть виступати тільки другий і третій рядки, а перший і четвертий не можуть, тому що на перетині з напрямним стовпцем знаходяться від'ємні елементи (–1 і –6). Вибираємо за напрямний рядок той, що має найменше симплекс-відношення $\theta = 4$ (третій рядок).

5. Розв’язним елементом буде 2.

6. Будуємо нову симплекс-таблицю

Б		z_3	z_6	$d(\bar{z}) \to \min$	Симплекс-відношення
В	В / Б	x_5	x_2	вільн. чл.	
$-z_1$	x_3	1/2	3/2	9	6
$-z_2$	x_4	–1/2	3/2	12	8
$-z_5$	x_1	1/2	–1/2	4	–
$-z_4$	x_6	3	-1	25	–
Вільн. чл.	$y(\bar{x}) \to \max$	3/2	–7/2	12	

7. В новій таблиці критерій оптимальності так саме не виконується: у другому стовпці є від’ємна оцінка –7/2. Отже напрямним буде другий стовпець. Напрямним рядком буде перший рядок, оскільки він має мінімальне симплекс-відношення $\theta = 6$.

8. Будуємо нову таблицю

Б		z_3	z_1	$d(\bar{z}) \to \min$
В	В / Б	x_5	x_3	Вільні чл.
$-z_6$	x_2	1/3	2/3	6
$-z_2$	x_4	–1	–1	3
$-z_5$	x_1	2/3	1/3	7
$-z_4$	x_6	10/3	2/3	31
Вільні чл.	$y(\bar{x}) \to \max$	8/3	7/3	33

9. Нове опорне рішення є оптимальним, тому що в останньому рядку немає від’ємних оцінок.

Отже, шукані рішення такі:

$$\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix},\ y^* = 33; \qquad \bar{z}^* = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \\ 8/3 \\ 0 \end{bmatrix},\ d^* = \frac{35}{3} + 0 + \frac{64}{3} + 0 = 33.$$

Перевірка

Згідно з теорією двоїстості ЗЛП:

– плани $\bar{x}^*$ і $\bar{z}^*$ оптимальні, якщо $y^* = d^*$;

– плани $\bar{x}^*$ і $\bar{z}^*$ оптимальні, якщо всі добутки сполучених умов для цих планів дорівнюють 0.

В умовах прикладу $y^* = d^* = 33$, і всі сполучені умови дорівнюють нулю:

$$x_1 z_5 = x_1\left(-3-(z_1 - z_2 - 2z_3 + 6z_4)\right) = 7\cdot\left(-3-\frac{7}{3}+0+\frac{16}{3}+0\right) \equiv 0;$$

$$x_2 z_6 = x_2\left(-2+2z_1 + z_2 - z_3 + 2z_4\right) = 6\cdot\left(-2+\frac{14}{3}+0-\frac{8}{3}+0\right) \equiv 0;$$

$$z_1 x_3 = z_1\left(5-(-x_1+2x_2)\right) = \frac{7}{3}\cdot(5+7-12) \equiv 0;$$

$$z_2 x_4 = z_2\left(16-(x_1+x_2)\right) = 0\cdot\left(16-(7+6)\right) \equiv 0;$$

$$z_3 x_5 = z_3\left(8-(2x_1-x_2)\right) = \frac{8}{3}\cdot(8-14+6) \equiv 0;$$

$$z_4 x_6 = z_4\left(1-(-6x_1+2x_2)\right) = 0\cdot(1+42-12) \equiv 0.$$

Отже, остаточна відповідь: $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\bar{z}^* = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 0 \\ 8/3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $y^* = d^* = 33$.

Економіко-математичний аналіз оптимальних рішень

Аналіз на чутливість оптимальних рішень базується на наступних властивостях двоїстих оцінок.

1. Двоїсті оцінки характеризують дефіцитність ресурсів. Величини z_i в оптимальному рішенні двоїстої задачі є оцінкою i-го ресурсу: чим більше значення оцінки z_i, тим вище дефіцитність ресурсу. Для недефіцитного ресурсу $z_i = 0$.

2. Двоїсті оцінки показують, як впливають зміни правої частини обмежень (запасів ресурсів) на значення цільової функції. Практичний інтерес мають границі (нижня й верхня) зміни ресурсів, у яких величини оцінок залишаються незмінними.

3. Двоїсті оцінки є показником ефективності виробництва окремих видів продукції з позиції критерію оптимальності. З цього погляду в оптимальний план може бути включена лише та продукція *j*-го виду, для якої виконується умова $\sum_{i=1}^{m} a_{ji} z_i \le c_j$.

4. Двоїсті оцінки дозволяють провести порівняння сумарних умовних витрат і результатів, рівність $y^* = d^*$ означає, що оцінка всіх витрат виробництва повинна дорівнювати оцінці зробленого продукту.

Таким чином, двоїсті оцінки дозволяють оцінити вплив на оптимальний план наступних економічних ситуацій:

- зміни запасів ресурсів;
- впровадження нового технологічного способу виробництва, що дозволяє знизити витрата сировини;
- зміни, що виникає у ціновій політиці підприємства;
- випуску нового виду продукції.

1.2.3. Розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою диференціального алгоритму

Диференціальний алгоритм можна вважати універсальним алгоритмом розв'язання задач лінійного алгоритму, оскільки він дозволяє знайти оптимальне рішення задачі, якщо воно існує, навіть коли вихідний опорний план є неприпустимим.

Диференціальний алгоритм (ДА) був розроблений для розв'язання загальної задачі математичного програмування, що має вигляд

$$y(\bar{x}) \to \min_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \bar{f}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x}^{+} \le \bar{x} \le \bar{x}^{++},$$

де цільова функція $y(\bar{x})$ і система обмежень $\bar{f}(\bar{x}) = 0$ в загальному випадку нелінійні.

Однак ДА з успіхом застосовується і для розв'язання задач лінійного програмування, причому в цьому випадку він значно спрощується. Спочатку треба ЗЛП привести до вигляду

$$y(\bar{x}) \to \min_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}, \tag{1.35}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \bar{f}(\bar{x}) = 0, \tag{1.36}$$

$$\bar{x} \ge 0. \tag{1.37}$$

Якщо вектор $\bar{x}$ розбити на дві складові $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{s} \end{bmatrix}$, де $\bar{t}$ – вектор незалежних змінних, $\bar{s}$ – вектор залежних змінних, то задача (1.35) – (1.37) набуває вигляду

$$y(\bar{t}) = \sum_{j=1}^{n-m} k_j t_j + y_0 \to \min_{t \in \mathbf{\Omega}}, \tag{1.38}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad s_i = \sum_{j=1}^{n-m} b_{ij} t_j + \beta_i, \tag{1.39}$$

$$s_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}; \quad t_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n-m}. \tag{1.40}$$

Рішення $\bar{x}_0^T = (0 \quad \dots \quad 0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_m)$, в якому незалежні змінні дорівнюють нулю ($\bar{t} = 0$), а залежні змінні дорівнюють вільним членам ($\bar{s} = \bar{\beta}$), називається *опорним*. Опорний розв'язок задачі лінійного програмування завжди задовольняє системі обмежень (1.36).

Серед опорних рішень виділяють *припустимі* опорні рішення, в яких відсутні від'ємні складові $\beta_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}$, тобто виконується умова (1.37), і *оптимальне* опорне рішення, таке припустиме опорне рішення, при якому

$$k_j = \frac{\partial y}{\partial t_j} \geq 0, \quad (j = \overline{1,n-m}) \ . \tag{1.41}$$

Будь-яке опорний розв'язок можна представити у вигляді таблиці.

	t_1	t_2	…	t_n	1
$s_1 =$	b_{11}	b_{12}	…	b_{1n}	β_1
$s_2 =$	b_{21}	b_{22}	…	b_{2n}	β_2
…	…	…	…	…	…
$s_m =$	b_{m1}	b_{m2}	…	b_{mn}	β_m
$y =$	k_1	k_2	…	k_n	y_0

Диференціальний алгоритм має три етапи:

1-й етап – пошук опорного розв'язку;

2-й етап – пошук припустимого опорного розв'язку;

3-й етап – пошук оптимального розв'язку.

Розглянемо послідовність дій на кожному етапі.

Етап пошуку опорного рішення. Поділивши вектор змінних на залежні $\bar{s}$ і незалежні $\bar{t}$ та виразивши залежні змінні через незалежні, одержують перше опорне рішення.

Перевіряють, чи є воно припустимим $\left(\beta_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}\right)$. Якщо є, переходять одразу до етапу пошуку оптимального рішення, якщо ні – до етапу пошуку припустимого рішення.

Етап пошуку припустимого опорного рішення. Для одержання нового опорного рішення необхідно вибрати *r*-у незалежну змінну, *k*-у залежну змінну та поміняти їх місцями за допомогою виконання одного кроку жорданових виключень. Вибір *r*-ї незалежної змінної та *k*-ї залежної змінної здійснюється за рахунок вибору *r*-го напрямного стовпця та *k*-го напрямного рядка.

Вибір напрямного стовпця. У рядку з будь-яким від'ємним β_i знаходять будь-який невід'ємний b_{ij} і *j-й* стовпець позначають його як напрямний стовпець. Якщо в рядку з від'ємним елементом β_i немає жодного невід'ємного елемента b_{ij}, то задача так саме не має жодного припустимого рішення.

Вибір напрямного рядка. Вибір здійснюється за критерієм

$$\Delta t_r = \min_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \left[-\frac{\beta_i}{b_{ir}} (i = 1,2,\ldots,m) \right] = -\frac{\beta_k}{b_{kr}}$$

тільки серед рядків, для яких $\frac{\beta_i}{b_{ir}} < 0$;

Виконання кроку жорданових виключень здійснюється за допомогою вже відомих чотирьох правил:

$$1)\ b_{kr} = \frac{1}{a_{kr}}; \quad 2)\ b_{\substack{kj \\ j\neq r}} = -\frac{a_{kj}}{a_{kr}}; \quad 3)\ b_{\substack{ir \\ i\neq k}} = \frac{a_{ir}}{a_{kr}}; \quad 4)\ b_{\substack{ij \\ i\neq k \\ j\neq r}} = a_{ij} - \frac{a_{ir} a_{kj}}{a_{kr}}; \qquad (1.42)$$

Якщо після виконання кроку жорданових виключень нове опорне рішення не є припустимим, процедуру отримання нового опорного рішення повторюють, доки всі залежні змінні не набудуть позитивних значень.

Отримане припустиме рішення перевіряють на оптимальність за критерієм (1.41). Якщо критерій виконується, то рішення знайдено. В протилежному разі переходять до етапу пошуку оптимального рішення.

Етап пошуку оптимального рішення. Для одержання нового опорного рішення знову необхідно вибрати *r*-у незалежну змінну, *k*-у залежну змінну та поміняти їх місцями за допомогою виконання одного кроку жорданових виключень. Вибір *r*-ї незалежної змінної та *k*-ї залежної змінної здійснюється за рахунок вибору *r*-го напрямного стовпця та *k*-го напрямного рядка.

Вибір напрямного стовпця. Серед с стовпців з від'ємними k_j обирають будь-який стовпець і позначають його як напрямний стовпець.

Вибір напрямного рядка. Вибір здійснюється за критерієм

$$\Delta t_r = \min_{b_{ir}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{ir}}(i=1,2,\dots,m)\right] = -\frac{\beta_k}{b_{kr}}$$

тільки серед рядків, для яких $b_{ir} < 0$. Якщо стовпець таблиці диференціального алгоритму з від'ємною похідною $k_j = \frac{\partial y}{\partial t_r} < 0$ не містить жодного від'ємного елемента b_{ir}, то задача немає рішення, оскільки нескінченне збільшення змінної t_r приводить до нескінченного зменшення функції цілі.

Виконання кроку жорданових виключень здійснюється за правилами (1.42).

Якщо після виконання кроку жорданових виключень нове опорне рішення не є оптимальним, процедуру отримання нового опорного рішення повторюють, доки не залишиться жодної від'ємної похідної або не буде доведено, що задача немає рішення.

Приклад 1.9. Меблевій фабриці необхідно виготовити не більше 12 заготівель типу *A*, не менше 8 заготівель типу *B* та не менше 10 заготівель типу *C*. Кожен лист фанери може бути розрізаний на заготівлі двома способами. Кількість одержуваних заготівель з одного листа 1-м способом становить 3 *шт* типу *A*, 4 *шт* типу *B*, 2 *шт* типу *C*, а 2-м способом – 4 *шт* типу *A*, 2 *шт* типу *B*, 7 *шт* типу *C*. Площа відходів при першому способі розкрою становить 2 $см^2$ з листа, а при другому способі розкрою – 1 $см^2$ з листа. Необхідно визначити, кількість листів фанери, розкроєних кожним зі способів таким чином, щоб були виконані норми по кількості заготівель при мінімальних загальних відходах.

Розв'язання

Побудуємо математичну модель задачі:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} f_1 = 3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ f_2 = 4x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ f_3 = 2x_1 + 7x_2 \ge 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

Приведемо задачу до канонічної форми за допомогою додаткових змінних x_3, x_4, x_5:

$$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \quad \begin{cases} f_1 = 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 12, \\ f_2 = 4x_1 + 2x_2 - x_4 = 8, \\ f_3 = 2x_1 + 7x_2 - x_5 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Виразимо змінні x_3, x_4, x_5 через x_1, x_2, одержимо:

$$x_3 = -3x_1 - 4x_2 + 12,$$
$$x_4 = 4x_1 + 2x_2 - 8,$$
$$x_5 = 2x_1 + 7x_2 - 10.$$

Заповнимо таблицю й знайдемо перше опорне рішення:

	x_1	x_2	1
$x_3=$	-3	-4	12
$x_4=$	4	2	-8
$x_5=$	2	7	-10
$y=$	2	1	0

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Перше опорне рішення не є припустимим, оскільки має дві від'ємні компоненти.

Пошук припустимого опорного рішення. Як напрямний можна вибрати перший або другий стовпці. Виберемо перший. Для вибору напрямного k-го рядка обчислимо критерій

$$\Delta t_1 = \min_{b_{ir}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{ir}}(i = 1,2,\ldots,m)\right] = \min\left[-\frac{12}{-3}; \quad -\frac{-8}{4}; \quad -\frac{-10}{2}\right] = 2.$$

Отже $k = 2$. Виконаємо крок жорданових виключень і одержимо нову таблицю та нове опорне рішення:

	x_4	x_2	1
x_3 =	-3/4	-5/2	6
x_1 =	1/4	-1/2	2
x_5 =	1/2	6	-6
y =	1/2	0	4

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Нове опорне так саме не є припустимим, оскільки має одну від'ємну компоненту. Тому повторюємо другий етап ще раз. Цього разу як напрямний можемо вибрати так саме перший або другий стовпці. Виберемо другий. Для вибору напрямного k-го рядка обчислимо критерій

$$\Delta t_2 = \min_{b_{ir}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{i2}}(i=1,2,...,m)\right] = \min\left[-\frac{6}{-5/2};\quad -\frac{2}{-1/2};\quad -\frac{-6}{6}\right] = 1.$$

Тепер $k = 3$.

Виконаємо крок жорданових виключень і одержимо нову таблицю та нове опорне рішення:

	x_4	x_5	1
x_3=	-2	-5/12	4
x_1=	7/24	-1/12	3/2
x_2=	-1/12	1/6	1
y=	1/2	0	4

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Нове опорне рішення є припустимим, оскільки не має від'ємних компонент. Воно також є оптимальним, оскільки $k_1 = 1/2 > 0$ та $k_2 = 0$ (немає від'ємних).

Шукане рішення: $\bar{x}^* = \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $y^* = 4$, тобто першим способом необхідно розрізати 1,5 листа фанери, а другим – 1 лист. При цьому загальні відходи складуть 4 $см^2$.

Приклад 1.10. Знайти оптимальне рішення задачі лінійного програмування:

$$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 - 2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12\ , \\ -x_1 + 3x_2 \le 6\ , \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16\ , \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,2\ .$$

Розв'язання. Приведемо задачу до вигляду (1.35) – (1.37). Для цього помножимо цільову функцію на –1 і в обмеження додамо три змінні x_3, x_4, x_5, в наслідок чого одержимо:

$$y(\bar{x}) = -x_1 - 2x_2 + 2 \to \min_{\bar{x}\in\Omega},$$

$$\Omega: \quad \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 12 \ , \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \ , \\ 2x_1 + 4x_2 - x_5 = 16 \ , \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \ .$$

Пошук опорного розв'язку. Нехай залежними змінними будуть додаткові змінні (x_3 , x_4, x_5), а незалежними будуть x_1 і x_2. Розв’яжемо систему обмежень відносно додаткових змінних:

$$x_3 = -4x_1 + 2x_2 + 12;$$

$$x_4 = x_1 - 3x_2 + 6;$$

$$x_5 = 2x_1 + 4x_2 - 16 .$$

Складемо таблицю ДА та одержимо перше опорне рішення:

	x_1	x_2	1
$x_3=$	-4	2	12
$x_4=$	1	-3	6
$x_5=$	**2**	4	-16
$y=$	-1	-2	2

$$\bar{x}_0^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 12 & 6 & -16 \end{bmatrix}$$

Воно не є припустимим тому, що $x_5 = -16 < 0$.

Пошук припустимого опорного рішення. Напрямним стовпцем може бути перший або другий, оскільки $b_{31} = 2 > 0$ і $b_{32} = 4 > 0$. Нехай напрямним стовпцем буде перший стовпець. Для вибору напрямного рядка застосуємо критерій

$$\Delta t_1 = \min_{\frac{\beta_i}{b_{ir}}<0} \begin{bmatrix} -\frac{12}{-4} & -\frac{-16}{2} \end{bmatrix} = 3 .$$

Це означає, що напрямним рядком буде перший рядок, залежна змінна x_3 стане незалежною, а незалежна змінна x_1 стане залежною. Головним елементом буде $b_{11} = -4$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нову таблицю та нове опорне рішення:

	x_3	x_2	1
$x_1 =$	-1/4	1/2	3
$x_4 =$	-1/4	-5/2	9
$x_5 =$	-1/2	5	-10
$Y =$	1/4	-5/2	-1

$$\overline{x}_1^{T} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Дане рішення не є припустимим. Треба знову повторити 2-й етап.

Пошук припустимого опорного рішення. Напрямним стовпцем може бути тільки другий стовпець, оскільки в третьому рядку тільки $b_{32} = 5 > 0$. Для вибору напрямного рядка застосуємо критерій

$$\Delta t_2 = \min_{\frac{\beta_i}{b_{ir}} < 0} \begin{bmatrix} -\frac{9}{-5/2} & -\frac{-10}{5} \end{bmatrix} = 2.$$

Отже третій рядок обирається як напрямний, і залежна змінна x_5 стане незалежною, а незалежна змінна x_2 стане залежною. Головним елементом буде $b_{32} = 5$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нову таблицю і нове опорне рішення:

	x_3	x_5	1
$x_1 =$	-1/5	1/10	4
$x_4 =$	-1/2	-1/2	4
$x_2 =$	1/10	1/5	2
$y =$	0	-1/2	-6

$$\overline{x}_2^{T} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Дане рішення є припустимим, але не оптимальним, тому що $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$.

Пошук оптимального розв'язку. Напрямним стовпцем може бути тільки другий стовпець, оскільки саме $k_2 = -\frac{1}{2} < 0$. Вибір напрямного рядка здійснюється тільки серед рядків, у яких $b_{ir} < 0$. Це означає, що як напрямний рядок може бути тільки другий рядок ($b_{22} = -\frac{1}{2} < 0$). Отже незалежна змінна x_5 стане залежною, а залежна змінна x_4 стане незалежною. Головним елементом буде $b_{22} = -\frac{1}{2}$. Виконавши один крок жорданових виключень, одержимо нову таблицю та нове опорне рішення:

	x_3	x_4	1
$x_1=$	-0,3	-1/5	4,8
$x_5=$	-1	-2	8
$x_2=$	-1/10	-2/5	3,6
$y=$	1/2	1	-10

$$\overline{x}_3^T = [4{,}8 \quad 3{,}6 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Останнє рішення є оптимальним, оскільки $k_1 = \frac{1}{2} > 0$ та $k_2 = 1 > 0$. Оптимальне значення цільової функції (з урахуванням заміни задачі максимізації задачею мінімізації) становить $y\left(\overline{x}_3^T\right) = 10$. Це значення одержано з останньої клітини таблиці шляхом зміни знака числа на протилежний.

Таким чином шукане рішення є $\overline{x}* = \begin{bmatrix} 4.8 \\ 3.6 \end{bmatrix}$, а відповідне оптимальне значення цільової функція є $y* = 10$.

Змістовий модуль 2 – Спеціальні задачі математичного програмування

2.1. Транспортна задача

2.1.1. Постанова транспортної задачі

Транспортна задача широко використовується в практиці планування. Це задача про знаходження найбільш раціонального, з погляду витрат, плану перевезень однорідного продукту від *постачальників* до *споживачів*.

Транспортна задача формулюється в такий спосіб. Однорідний продукт, зосереджений у m пунктах відправлення в кількостях $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m$ одиниць відповідно, необхідно доставити в кожний з n пунктів призначення в кількостях $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ одиниць відповідно. Вартість (відстань) перевезення одиниці продукту з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення дорівнює c_{ij} і відома для кожного маршруту. Нехай x_{ij} – кількість продукту, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення. Задача полягає у визначенні таких величин x_{ij} для всіх маршрутів, при яких сумарна вартість (або відстань) перевезень була мінімальною.

Математична модель транспортної задачі має вигляд:

$$y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min_{x_{ij}\in\mathbf{\Omega}}, \tag{2.1}$$

$$\Omega:\quad f_j=\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\quad j=\overline{1,n}, \tag{2.2}$$

$$f_{n+i}=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\quad i=\overline{1,m}, \tag{2.3}$$

$$x_{ij}\ge 0;\quad i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}, \tag{2.4}$$

де c_{ij} – тарифи (вартість, час, відстань) перевезення одиниці вантажу з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення; a_j – запаси вантажу в i-му пункті відправлення; b_i – потреба у вантажі в j-му пункті призначення; x_{ij} – кількість од. вантажу, перевезеного з i-го пункту відправлення в j-й пункт призначення.

Перевезений ватаж може характеризуватися вагою (тонни, кілограми) довжиною (погонні метри), площею (квадратні метри), обсягом (літри, кубічні метри) і т.п.. У кожному разі характеристика повинна бути неперервною величиною. Наприклад, перевозиться рідина, сипучий матеріал, дрібні заготівлі або дрібна продукція.

Транспортну задачу можна подати у вигляді таблиці:

				Пункти призначення					
				1	2	…	j	…	N
				Потреби					
				b_1	b_2	…	b_1	…	b_n
Пункти відправлення	1	Запаси	a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
	2		a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}
	…		…	…	…	…	…	…	…
	i		a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
	…		…	…	…	…	…	…	…
	m		a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Якщо $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тобто загальна потреба у вантажі в пунктах призначення дорівнює запасу вантажу в пунктах відправлення, то маємо транспортну задачу *закритого* типу. В противному разі маємо транспортну задачу відкритого типу.

План $\overline{x}^* = \left[x_{ij}^*\right]$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ є *невиродженим*, якщо в ньому кількість відмінних від нуля компонентів у точності дорівнює $m + n - 1$, а якщо менше – то *виродженим*.

2.1.2. Розв’язання транспортної задачі

Процес розв'язку транспортної задачі складається з двох етапів:

1. Побудови початкового опорного плану перевезень;
2. Знаходження оптимального плану.

Найбільш поширеними методами побудови вихідного опорного плану є метод *північно-західного* кута та метод *мінімальної вартості*.

<u>Метод північно-західного кута</u> – найпростіший метод побудови опорного плану. Він полягає в послідовному розподілі продукції споживачам з урахуванням можливостей постачальників, починаючи з лівої верхньої клітинки й закінчуючи правою нижньою клітинкою.

<u>Метод мінімальної вартості</u>. Побудова опорного плану методом мінімальної вартості починається з заповнення клітини з найменшим c_{ij} . В цю клітину записують $\min(a_i, b_j)$. Далі вилучають з подальшого розгляду вільні клітинки рядка або стовпця залежно від оператора $\min(a_i, b_j)$. Потім переходять до клітини з найменшим c_{ij} серед незаповнених і так далі.

Найбільш поширеним методом знаходження оптимального плану транспортної задачі є *метод потенціалів*. Метод припускає, що відомо будь-який опорний план, який перевіряємо на оптимальність методом потенціалів.

Доведено, якщо для деякого опорного плану $\mathbf{X} = [x_{ij}]$ $(i=\overline{1,m},\ \ j=\overline{1,n})$ транспортної задачі із заданими тарифами перевезень c_{ij} існують такі числа u_i $(i=\overline{1,m})$ і v_j $(j=\overline{1,n})$, що

$$u_i + v_j = c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} > 0\ , \tag{2.5}$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad \text{при} \qquad x_{ij} = 0 \tag{2.6}$$

для всіх $i=\overline{1,m}$ та $j=\overline{1,n}$, то $\mathbf{X}$ – оптимальний план.

Числа $u_i\ (i=\overline{1,m})$ й $v_j\ (j=\overline{1,n})$ називаються *потенціалами* відповідно пунктів відправлення й пунктів призначення.

Алгоритм методу потенціалів

Процесом пошуку оптимального плану перевезень методом потенціалів є покрокова процедура. Кожний крок складається з трьох етапів.

1-*й етап*. Для знайденого опорного невиродженого плану знаходять потенціали пунктів відправлення та призначення, користуючись співвідношенням (2.5). Оскільки число заповнених кліток дорівнює $n+m-1$, а число змінних – $n+m$, то один з потенціалів дорівнюють до нуля.

2-*й етап*. Для кожної вільної клітинки визначають числа $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Якщо $\Delta_{ij} \le 0$, то отриманий план згідно з (2.6) є оптимальним рішенням транспортної задачі Якщо ж для деякої вільної клітинки $\Delta_{ij} > 0$, то необхідно перейти до нового опорного плану.

3-*й етап*. Знаходять новий опорний план. Для цього розглядають всі вільні клітинки, для яких $\Delta_{ij} > 0$, і вибирають ту, для яких число Δ_{ij} максимальне. Обрану клітинку треба заповнити, її позначають знаком «+» і формують *цикл*, за яким необхідно змінити об'єми перевезень.

Циклом у таблиці транспортної задачі називається *замкнута ламана лінія*, вершини якої розташовані в зайнятих клітинках таблиці, а відрізки – вздовж рядків і стовпців (рис. 2.1), причому в кожній вершині циклу зустрічаються рівно два відрізки, один з яких перебуває в рядку, а інший – у стовпці.

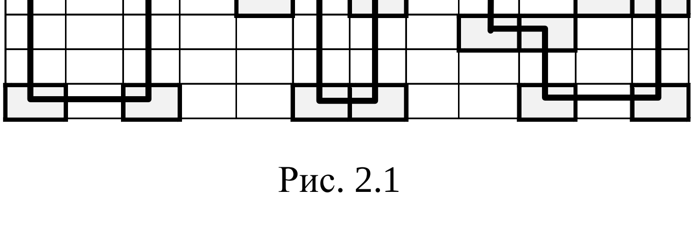


Рис. 2.1

При правильній побудові опорного плану для будь-якої вільної клітинки можна побудувати лише один цикл. Вільна клітинка позначається «+», потім знаки чергуються «–», «+», «–», «+», … У вільну клітинку переносять менше із чисел x_{ij}, що знаходяться в «мінусових» клітинках, і одночасно це число додають до чисел, що знаходяться в «плюсових» клітинках. Клітинка, що була вільною, стає зайнятою, а «мінусова» клітинка, у якій стояло мінімальне число x_{ij}, стає вільною. Далі переходять до 1-го етапу.

Приклад 2.1

Чотири підприємства для виробництва продукції використовують сировину, запаси якої зосереджені на трьох складах відповідно у кількості 40, 25, 35 (*т*). Потреби в сировині кожного з підприємств відповідно дорівнюють 15, 40, 30, і 15 (*т*). На кожне з підприємств сировина може завозитися з будь-якого складу. Тарифи перевезень (*грн./т*) є відомими величинами і задаються матрицею $\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 4 & 9 & 4 \\ 6 & 3 & 8 & 7 \end{bmatrix}$. Скласти такий план перевезень сировини, при якому загальна вартість є мінімальною.

Розв'язання

Сумарні запаси сировини на складах становлять 100 *т*. Саме таку сумарну потребу в сировині мають всі підприємства. Тому ця задача відноситься до транспортних задач закритого типу.

Складемо математичну модель задачі.

Невідомі (змінні) задачі подамо матрицею $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}$, елементи якої x_{ij} $\left(i=\overline{1,3},\quad j=\overline{1,4}\right)$ визначають кількість сировини (*т*), яку треба перевезти з *i*-го складу до *j*-го підприємства.

Цільова функція визначає мінімальну вартість перевезень і відповідає виразу $y=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}x_{ij}$, де c_{ij} – елементи заданої матриці тарифів **C**. В розгорнутому вигляді цільова функція є виразом

$$y=2x_{11}+5x_{12}+7x_{13}+4x_{14}+7x_{21}+4x_{22}+9x_{23}+4x_{24}+6x_{31}+3x_{32}+8x_{33}+7x_{34}.$$

Визначимо обмеження завдання, тобто область припустимих рішень $\mathbf{\Omega}$. Область $\mathbf{\Omega}$ складається з обмежень трьох типів.

Перший тип обмежень відповідає системі рівностей (2.2). В умовах задачі це система

$$\begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 40, \\ f_2 = \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 25, \\ f_3 = \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 35. \end{cases}$$

Другий тип обмежень відповідає системі рівностей (2.3). В умовах задачі це система

$$\begin{cases} f_4 = \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 15, \\ f_5 = \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 40, \\ f_6 = \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 30, \\ f_7 = \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 15. \end{cases}$$

Третій тип обмежень відповідає системі нерівностей (2.4). В умовах задачі це система

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4}.$$

Шукана математична модель задачі:

$$y = 2x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{14} + 7x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23} + 4x_{24} + 6x_{31} + 3x_{32} + 8x_{33} + 7x_{34} \to \min_{x_{ij} \in \mathbf{\Omega}},$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad \begin{cases} f_1 = \sum_{j=1}^{4} x_{1j} = 40, \; f_2 = \sum_{j=1}^{4} x_{2j} = 25, \; f_3 = \sum_{j=1}^{4} x_{3j} = 35, \\ f_4 = \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 15, \; f_5 = \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 40, \; f_6 = \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 30, \; f_7 = \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 15. \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0; \quad i = \overline{1,3}; \quad j = \overline{1,4}.$$

Знайдемо початковий опорний план задачі методом північно-західного кута.

Процес пошуку здійснюється за допомогою таблиці транспортної задачі, яка відбиває умови задачі і підготовлює клітинки таблиці для майбутнього опорного плану (поки всі клітинки вважаються вільними):

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства			
		1	2	3	4
		Потреба в сировині			
		b_1=15	b_2=40	b_3=30	b_4=15
1	a_1=40	**2**	**5**	**7**	**4**
2	a_2=25	**7**	**4**	**9**	**4**
3	a_3=35	**6**	**3**	**8**	**7**

Процес заповнення клітинок таблиці, тобто формування омпонент x_{ij} опорного плану) починають з верхнього лівого кута. Порівнюють значення a_1 і b_1. Менше з них є компонента x_{11}. Її поміщають в вільну верхню ліву клітину. Інші клітинки першого рядка або стовпця заповнюють прочерками – потребу 1-го підприємства виконано.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства			
		1	2	3	4
		Потреба в сировині			
		b_1=15	b_2=40	b_3=30	b_1=15
1	a_1=40	**2** 15	**5**	**7**	**4**
2	a_2=25	**7** –	**4**	**9**	**4**
3	a_3=35	**6** –	**3**	**8**	**7**

Тепер на першому складі залишилось 40 – 15 = 25 *т* сировини. Порівнюємо залишок 25 *т* і потребу $b_2 = 40\,т$. Менше з них є компонента x_{12}. Записуємо її в вільну верхню ліву клітину. Інші клітинки першого рядка заповнюємо прочерками – запас першого складу вичерпано.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства			
		1	2	3	4
		Потреба в сировині			
		b_1=15	b_2=40	b_3=30	b_4=15
1	a_1=40	**2** 15	**5** 25	**7** –	**4** –
2	a_2=25	**7** –	**4**	**9**	**4**
3	a_3=35	**6** –	**3**	**8**	**7**

Тепер потреба другого підприємства становить тільки 40 – 25 = 15 *т*. Порівнюємо запас другого складу 25 *т* і нову потребу другого підприємства $b_2 = 15\,т$. Менше з них є компонента x_{22}. Записуємо її в вільну верхню ліву клітину. Іншу клітинку другого стовпця заповнюємо прочерком – потребу другого підприємства виконано.

Індекс складу *i*	Запас	Індекс підприємства			
		1	2	3	4
		Потреба в сировині			
		b_1=15	**b_2=40**	**b_3=30**	**b_4=15**
1	**a_1=40**	**2** **15**	**5** **25**	**7** **–**	**4** **–**
2	**a_2=25**	**7** **–**	**4** **15**	**9**	**4**
3	**a_3=35**	**6** **–**	**3** **–**	**8**	**7**

Тепер на другому складі залишилось 25 – 15 = 10 *т* сировини. Порівнюємо залишок 10 *т* і потребу $b_3 = 30\,т$. Менше з них є компонента x_{23}. Записуємо її в вільну верхню ліву клітину. Іншу клітинку другого рядка заповнюємо прочерком – запас другого складу вичерпано.

Індекс складу *i*	Запас	Індекс підприємства			
		1	2	3	4
		Потреба в сировині			
		b_1=15	**b_2=40**	**b_3=30**	**b_4=15**
1	**a_1=40**	**2** **15**	**5** **25**	**7** **–**	**4** **–**
2	**a_2=25**	**7** **–**	**4** **15**	**9** **10**	**4** **–**
3	**a_3=35**	**6** **–**	**3** **–**	**8**	**7**

Тепер потреба третього підприємства становить тільки 30 – 10 = 20 *т*. Порівнюємо запас третього складу 35 *т* і нову потребу третього підприємства 20 *т*. Менше з них є компонента x_{33}. Записуємо її в вільну ліву клітину. В іншу клітинку третього рядка записуємо залишок сировини на третьому складі, який точнісінько дорівнює потребі четвертого підприємства, тобто

$$x_{34} = 35 - 20 = b_4 = 15 .$$

<table>
<tr><td rowspan="4">Індекс складу i</td><td rowspan="4">Запас</td><td colspan="4">Індекс підприємства</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="4">Потреба в сировині</td></tr>
<tr><td>b_1=15</td><td>b_2=40</td><td>b_3=30</td><td>b_4=15</td></tr>
<tr><td>1</td><td>a_1=40</td><td>2
15</td><td>5
25</td><td>7
–</td><td>4
–</td></tr>
<tr><td>2</td><td>a_2=25</td><td>7
–</td><td>4
15</td><td>9
10</td><td>4
–</td></tr>
<tr><td>3</td><td>a_3=35</td><td>6
–</td><td>3
–</td><td>8
20</td><td>7
15</td></tr>
</table>

Таким чином, одержимо перший опорне рішення. Значення цільової функції першого опорного рішення плану $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 15 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 15 \end{bmatrix}$ становить: $y = 15 \cdot 2 + 25 \cdot 5 + 15 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + 20 \cdot 8 + 15 \cdot 7 = 570$.

Для пошуку оптимального рішення застосуємо метод потенціалів.

Знаходження оптимального плану методом потенціалів. Знайдене опорне рішення є невиродженим, оскільки має $m + n - 1 = 6$ ненульових значень.

Розрахуємо потенціали u_i й v_j за співвідношенням $u_i + v_j = c_{ij}$ для всіх $x_{ij} > 0$. Нехай $u_1 = 0$, тоді $v_1 = c_{11} = 2$, а $v_2 = c_{12} = 5$.

<table>
<tr><td rowspan="4">Індекс складу i</td><td rowspan="4">Запас</td><td colspan="4">Індекс підприємства</td><td rowspan="4">u_i</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="4">Потреба в сировині</td></tr>
<tr><td>15</td><td>40</td><td>30</td><td>15</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$a_1 = 40$</td><td>2
15</td><td>5
25</td><td>7</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$a_2 = 25$</td><td>7</td><td>4
15</td><td>9
10</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>$a_3 = 35$</td><td>6</td><td>3</td><td>8
20</td><td>7
15</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">v_j</td><td>2</td><td>5</td><td></td><td></td></tr>
</table>

Тепер можемо знайти u_2:

$$u_2 = c_{22} - v_2 = 4 - 5 = -1$$

Потім знайдемо v_3:

$$v_3 = c_{23} - u_2 = 9 - (-1) = 10.$$

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** **25**	**7**	**4**	**0**
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **15**	**9** **10**	**4**	**−1**
3	$a_3 = 35$	**6**	**3**	**8** **20**	**7** **15**	
v_j		**2**	**5**	**10**		

Аналогічно знаходимо u_3 й v_3:

$$u_3 = c_{33} - v_3 = 8 - 10 = -2 \quad ,$$

$$v_3 = c_{34} - u_3 = 7 - (-2) = 9 \quad .$$

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** **25**	**7**	**4**	**0**
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **15**	**9** **10**	**4**	**−1**
3	$a_3 = 35$	**6**	**3**	**8** **20**	**7** **15**	**−2**
v_j		**2**	**5**	**10**	**9**	

Щоб здійснити аналіз опорного рішення, для всіх вільних (нульових) клітинок розраховуємо величини $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Якщо всі $\Delta_{ij} \le 0$, то знайдене рішення є оптимальним.

На даному етапі маємо такі величини Δ_{ij}:

$\Delta_{13} = 10 + 0 - 7 = 3 > 0$; $\quad \Delta_{21} = 2 - 1 - 7 = -6 < 0$, $\quad \Delta_{31} = 2 - 2 - 6 = -6 < 0$,

$\Delta_{14} = 9 + 0 - 4 = 5 > 0$; $\quad \Delta_{24} = 9 - 1 - 4 = 4 > 0$, $\quad \Delta_{33} = 5 - 2 - 3 = 0$.

Як бачимо умова оптимальності порушено для Δ_{13}, Δ_{14} та Δ_{24}.

Найбільше порушення має місце для Δ_{14}. Тому клітинку з x_{14} треба заповнити. Для цього будують розвантажувальний цикл за загальним правилам побудови циклу, які були розглянуті раніше.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** **−** **25**	**7**	**4** **+**	0
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **+** **15**	**9** **−** **10**	**4**	−1
3	$a_3 = 35$	**6**	**3**	**8** **+** **20**	**7** **−** **15**	−2
v_j		2	5	10	9	

У вільну клітинку x_{14} переносять менше із чисел, що знаходяться в «мінусових» клітинках (це число 10, що стоїть в клитині x_{23}), і одночасно його додають до чисел, що стоять в «плюсових» клітинках і віднімають від чисел, що стоять «мінусових» клітинках.

Провівши компенсації за циклом, одержуємо новий опорний план.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** **15**	**7**	**4** **10**	
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **25**	**9**	**4**	
3	$a_3 = 35$	**6**	**3**	**8** **30**	**7** **5**	
v_j						

Для нового опорного рішення $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 0 & 10 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 5 \end{bmatrix}$ значення цільової функції становить $y = 520$. Маємо покращення цільової функції в порівнянні з попереднім значенням (570). Отже новий опорний план краще за попередній.

Далі алгоритм пошуку оптимального опорного рішення повторюється.

Знову знаходимо потенціали.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** **15**	**7**	**4** **10**	**0**
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **25**	**9**	**4**	**−1**
3	$a_3 = 35$	**6**	**3**	**8** **30**	**7** **5**	**3**
v_j		**2**	**5**	**5**	**4**	

Обчислюємо для всіх вільних клітинок величини $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

$\Delta_{13} = 5 + 0 - 7 = -2 < 0$; $\Delta_{23} = 5 - 1 - 9 = -5 < 0$; $\Delta_{31} = 2 + 3 - 6 = -1 < 0$;

$\Delta_{21} = 2 - 1 - 7 = -6 < 0$; $\Delta_{24} = 4 - 1 - 4 = -1 < 0$; $\Delta_{32} = 5 + 3 - 3 = 5 > 0$.

Позитивне значення для Δ_{32} свідчить про порушення умови оптимальності. Тому будуємо розвантажувальний цикл:

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** − **15**	**7**	**4** + **10**	0
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **25**	**9**	**4**	−1
3	$a_3 = 35$	**6**	**3** +	**8** **30**	**7** − **5**	3
v_j		2	5	5	4	

Проводимо компенсації за циклом і одержуємо новий опорний план:

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** **10**	**7**	**4** **15**	
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **25**	**9**	**4**	
3	$a_3 = 35$	**6**	**3** **5**	**8** **30**	**7**	
v_j						

Для нового опорного рішення $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 30 & 0 \end{bmatrix}$ значення цільової функції становить 495. Новий опорний план знову краще за попередній. Обчислюємо потенціали, а потім величини $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$:

$\Delta_{13} = 10 + 0 - 7 = 3 > 0$, $\Delta_{23} = 10 - 9 - 9 = 0$, $\Delta_{31} = 0 - 6 = -6 < 0$,

$\Delta_{21} = 2 - 1 - 7 = -6 < 0$, $\Delta_{24} = 4 - 1 - 4 = -1 < 0$, $\Delta_{34} = 4 - 2 - 7 = -5 < 0$.

Як бачимо $\Delta_{13} > 0$, отже нове рішення не є оптимальним. З клітинки x_{13} будуємо розвантажувальний цикл.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5** − **10**	**7** +	**4** **15**	0
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **25**	**9**	**4**	−1
3	$a_3 = 35$	**6**	**3** + **5**	**8** − **30**	**7**	–2
v_j		2	5	10	4	

Проводимо компенсації за циклом і одержуємо новий опорний план:

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	**40**	**30**	**15**	
1	a_1=40	**2** **15**	**5**	**7** **10**	**4** **15**	
2	a_2=25	**7**	**4** **25**	**9**	**4**	
3	a_3=35	**6**	**3** **15**	**8** **20**	**7**	
v_j						

Для нового опорного рішення $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 20 & 0 \end{bmatrix}$ значення цільової функції становить 465. Знову маємо покращення функції. Обчислюємо потенціали, а потім величини Δ_{ij}:

$\Delta_{12} = 2 + 0 - 5 = -3 < 0$, $\Delta_{23} = 7 + 2 - 9 = 0$, $\Delta_{31} = 2 + 1 - 6 = -3 < 0$,
$\Delta_{21} = 2 + 2 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{24} = 4 + 2 - 4 = 2 > 0$, $\Delta_{34} = 4 + 1 - 7 = -2 < 0$.

Знову нове рішення не є оптимальним. Величини $\Delta_{24} > 0$, тому з клітинки x_{24} будуємо розвантажувальний цикл.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5**	**7** + **10**	**4** − **15**	0
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** − **25**	**9**	**4** +	2
3	$a_3 = 35$	**6**	**3** + **15**	**8** − **20**	**7**	1
v_j		2	2	7	4	

Проведемо компенсації за циклом. Одержимо новий опорний план.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	**40**	**30**	**15**	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5**	**7** **25**	**4**	
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **10**	**9**	**4** **15**	
3	$a_3 = 35$	**6**	**3** **30**	**8** **5**	**7**	
v_j						

Для нового опорного рішення $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 30 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ значення цільової функції становить 435. Знову маємо покращення функції. Обчислюємо потенціали, а потім величини Δ_{ij}:

$\Delta_{12} = 2 + 0 - 5 = -3 < 0$, $\Delta_{21} = 2 + 2 - 7 = -3 < 0$, $\Delta_{31} = 2 + 1 - 6 = -3 < 0$,
$\Delta_{14} = 2 + 0 - 4 = -2 < 0$, $\Delta_{23} = 7 + 2 - 9 = 0$, $\Delta_{34} = 2 + 1 - 7 = -4 < 0$.

Серед величин Δ_{ij} немає позитивних, тому останнє рішення є оптимальним.

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	40	30	15	
1	$a_1 = 40$	**2** **15**	**5**	**7** **25**	**4**	**0**
2	$a_2 = 25$	**7**	**4** **10**	**9**	**4** **15**	**2**
3	$a_3 = 35$	**6**	**3** **30**	**8** **5**	**7**	**1**
v_j		**2**	**2**	**7**	**2**	

Отже, знайдено оптимальний план $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 15 \\ 0 & 30 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, за яким цільова функція набуває оптимального значення $y^* = 435$.

Знаходження початкового опорного плану методом мінімальної вартості

Процес заповнення клітинок x_{ij} починається з клітинки з найменшим c_{ij}. Значення клітинки x_{ij} знаходимо як $\min\{a_i, b_j\}$. Далі заповнюються прочерками вільні клітинки рядка або стовпця залежно від вибору в операторі $\min\{a_i, b_j\}$. Потім переходять до клітинки з найменшим c_{ij} серед незаповнених.

В умовах прикладу 2.1 кінцева таблиця, заповнення якої здійснювалось за методом мінімальної вартості, має вигляд:

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства			
		1	2	3	4
		Потреба в сировині			
		$\boldsymbol{b_1}$**=15**	$\boldsymbol{b_2}$**=40**	$\boldsymbol{b_3}$**=30**	$\boldsymbol{b_4}$**=15**
1	$a_1 =$ **40**	**2** **15**	**5** **–**	**7** **10**	**4** **15**
2	$a_2 =$ **25**	**7** **–**	**4** **5**	**9** **20**	**4** **–**
3	$a_3 =$ **35**	**6** **–**	**3** **35**	**8** **–**	**7** **–**

Для опорного плану $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 5 & 20 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ цільова функція складе $y = 465$ *грн.*

Приклад 2.2. Завершити пошук оптимального рішення в умовах попередньої задачі починаючи розв'язання з початкового опорного плану $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 10 & 15 \\ 0 & 5 & 20 & 0 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, який одержано за методом мінімальної вартості.

Розв'язання

Вирішення задачі ілюструється таблицями, які заповнювалися згідно з алгоритмом методу потенціалів.

Початкова таблиця:

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	**40**	**30**	**15**	
1	a_1=40	**2** **15**	**5**	**7** **+ 10**	**4** **− 15**	**0**
2	a_2=25	**7**	**4** **5**	**9** **− 20**	**4** **+**	**2**
3	a_3=35	**6**	**3** **35**	**8**	**7**	**1**
v_j		**2**	**2**	**7**	**4**	

Наступна таблиця:

Індекс складу i	Запас	Індекс підприємства				u_i
		1	2	3	4	
		Потреба в сировині				
		15	**40**	**30**	**15**	
1	a_1=40	**2** **15**	**5**	**7** **25**	**4**	**−2**
2	a_2=25	**7**	**4** **5**	**9** **5**	**4** **15**	**0**
3	a_3=35	**6**	**3** **35**	**8**	**7**	**−1**
v_j		**4**	**4**	**9**	**4**	

Ми одержали оптимальний план $\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \\ 0 & 35 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, для якого $y^* = 435$. Хоча даний розв'язок відрізняється від попереднього, оптимальне значення цільової функції залишається незмінним. Це говорить про те, що в одній задачі може бути кілька оптимальних рішень, однак вони всі мають одне і те ж значення цільової функції.

2.2. Задачі нелінійної оптимізації

2.2.1. Безумовна оптимізація. Метод Ейлера

Нелінійність в економіці виникає, коли результати діяльності підприємств зростають або спадають непропорційно зміні масштабів використання ресурсів, наприклад, через насичення ринку товарами, коли кожну наступну одиницю товару продати складніше, ніж попередню.

Задачі нелінійної оптимізації можна поділити на два великих класи: *безумовна оптимізація* (областю припустимих рішень є увесь евклідів простір) і *умовна оптимізація* (наявність області $\mathbf{\Omega}$).
Задача пошуку безумовного глобального оптимуму формулюється в такий спосіб: знайти оптимум функції $y(\overline{x})$, заданої в *n-мірному* евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$.

Задача пошуку безумовного глобального оптимуму формулюється в такий спосіб: знайти оптимум функції $y(\overline{x})$, заданої в *n-мірному* евклідовому просторі R^n. Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y\left(\overline{x}\right) \to \underset{\bar{x}\in\mathbf{R}^n}{opt}\,. \tag{2.7}$$

Необхідні умови точки локального оптимуму мають вигляд:

$$\boxed{\left(\frac{\partial\, y}{\partial\, \overline{\overline{x}}}\right)^{*} = 0}\,, \tag{2.8}$$

або, інакше кажучи, в точці локального оптимуму *градієнт функції дорівнює нулю*.

Геометрично умова (2.8) означає, що гіперплощина, дотична до функції в точці оптимуму, паралельна гіперплощини визначення цієї функції. Так, для функції однієї змінної це – дотична лінія, паралельна осі x; для функції двох змінних – площина, паралельна площини $x_1 0 x_2$.

Точка $\overline{x}^0$, для якої виконується умова $\left(\dfrac{\partial y}{\partial \overline{\overline{x}}}\right)\Bigg|_{\overline{x}^0} = 0$, називається *стаціонарною* точкою функції $y\left(\overline{x}\right)$.

На рис. 2.2 наведені різні приклади стаціонарних точок для функції однієї змінної. Стаціонарна точка не обов'язково повинна бути екстремальною. Прикладом такої точки може бути точка перегину функції на рис. 2.2,*б*.

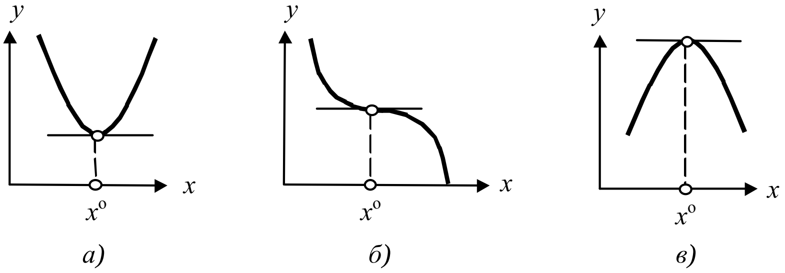


Рис. 2.2 – Приклади стаціонарних крапок функції однієї змінної

Для того щоб визначити достатні умови існування локального оптимуму, розглянемо матрицю Гесса (гессіан).

$$\mathbf{H}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$ де $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ – частинні похідні функції *y(x)*.

Матриця Гесса є симетричною. Матриця Гесса $\mathbf{H}^{\circ}$ позначає матрицю з елементами, обчисленими в стаціонарній точці. Вираз $\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\circ}\Delta\mathbf{x}$ визначає диференціальну квадратичну форма в стаціонарній точці.

Диференціальна квадратична форма дозволяє зробити висновок про характер стаціонарної точки.

Якщо матриця $\mathbf{H}^{\circ}$ *позитивно (додатно) визначена*, то диференціальна квадратична форма $\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\circ}\Delta\mathbf{x}$ так саме позитивно визначена, а стаціонарна точка відповідає *мінімуму*.

Якщо матриця $\mathbf{H}^{\circ}$ *негативно (від'ємно) визначена*, то диференціальна квадратична форма $\frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}^{\circ}\Delta\mathbf{x}$ так саме негативно визначена, а стаціонарна точка відповідає *максимуму*.

Нарешті, функція не має екстремуму в стаціонарній точці, якщо матриця Гесса в цій точці є невизначеною. Це характерно для всіх точок сідловин, що э у функції.

Визначеність матриці можна встановити за критерієм *Сильвестра*:

– матриця $\mathbf{H}^{\circ}$ позитивно визначена в тім і тільки в тому випадку, якщо всі *головні визначники* матриці позитивні $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots\ ,\ \Delta_n > 0$;

– матриця $\mathbf{H}^{\circ}$ негативно визначена в тім і тільки в тому випадку, якщо всі непарні головні визначники матриці від'ємні, а всі парні – позитивні, тобто $\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \ (-1)^n \Delta_n > 0$;

– у всіх інших випадках матриця вважається невизначеною або частково визначеною.

Всі методи розв'язання задач безумовної оптимізації можна поділити на два класи: *класичні* і *прямі* (прямого пошуку) . Класичні методи дозволяють аналітично виразити оптимальну точку, через розв'язання системи рівнянь, і при цьому знаходять точні значення координат всіх екстремальних точок.

Методи прямого пошуку, які також називають *пошуковими, покроковими, ітераційними, обчислювальними, наближеними* або *некласичними,* розв'язують задачу безумовної оптимізації шляхом поступового поетапного наближення до точки екстремуму. Рішення одержують наближеним, але з наперед заданою точністю.

Метод Ейлера

Метод Ейлера є класичним і заснований на необхідних і достатніх умовах існування екстремуму. Метод дозволяє виявляти всі екстремальні точки цільової функції (як локальні мінімуми, так і локальні максимуми) і в такий спосіб дати загальні данні про вид гіперповерхні функції $y(\overline{x})$ в гіперпросторі $\mathbf{R}^n$.

Алгоритм методу полягає в наступному:

1. Відповідно до необхідної умови локального екстремуму частинні похідні по кожній змінній x_i від цільової функції $y(\overline{x})$ дорівнюють нулю: $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}$;

2. Розв'язують будь-яким відомим методом отриману систему, що складається у загальному випадку з системи *n* нелінійних рівнянь. Корені системи, якщо вони існують, являють собою стаціонарні точки функції $y(\overline{x})$.

3. Всі другі частинні похідні від функції $y(\overline{x})$ обчислюють у кожній стаціонарній точці. За обчисленими похідними формують матрицю Гесса для кожної стаціонарної точки. Досліджують характер отриманих гессіанов. За характером матриці Гесса встановлюють тип стаціонарних точок.

4. Обчислюють значення функції $y(\overline{x})$ в точках локальних екстремумів. Потім шляхом порівняння обчислених значень знаходять абсолютний екстремум.

Визначення характеру гессіанів виконують за критерієм Сильвестра:

– якщо матриця $\mathbf{H}^{\circ}$ позитивно визначена, то стаціонарна точка відповідає мінімуму;

– якщо матриця $\mathbf{H}^{\circ}$ від'ємно визначена, то стаціонарна точка відповідає максимуму.

Приклад 2.3.

Підприємство виробляє два види продукції *A* и *B* відповідно у кількості x_1 і x_2. Прямі витрати на виробництво всієї продукції в грошовому еквіваленті становлять $2x_1x_2$ (*грн.*), побічні витрати на зберігання сировини, що заготовило підприємство для виробництва, становлять $\frac{27}{x_1^2 x_2}$ (*грн.*). Крім того, побічні витрати на зберігання пакувальних матеріалів для товару *B* становлять – $\frac{3}{x_2}$ (*грн.*). Визначити, яку кількість продукції *A* и *B* треба виробити підприємству, щоб загальні витрати на виробництво були мінімальними.

Розв'язання

Запишемо математичну модель задачі. Загальні витрати підприємства визначаються виразом $2x_1x_2 + \frac{3}{x_2} + \frac{27}{x_1^2 x_2}$. Отже математична модель даної задачі має такий вигляд:

$$y(\bar{x}) = 2x_1x_2 + \frac{3}{x_2} + \frac{27}{x_1^2 x_2} \to \min_{x \in \mathbf{R}^2} .$$

Ця задача до задач нелінійної оптимізації, оскільки цільова функція нелінійна. Якщо знехтувати обов'язковою умовою щодо позитивності значень x_1 *і* x_2, то задачу можна віднести до безумовної мінімізації та для її розв'язання застосувати метод Ейлера.

Вирішимо задачу методом Ейлера

1. Візьмемо перші похідні цільової функції:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_2 - \dfrac{54}{x_1^3 x_2}; \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_1 - \dfrac{3}{x_2^2} - \dfrac{27}{x_1^2 x_2^2}. \end{cases}$$

2. Розв'яжемо систему нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_2 - \dfrac{54}{x_1^3 x_2} = 0, \\ 2x_1 - \dfrac{3}{x_2^2} - \dfrac{27}{x_1^2 x_2^2} = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння виразимо змінну x_1 через змінну x_2: $x_1^3 = \frac{27}{x_2^2}$, або $x_1 = \frac{3}{x_2^{2/3}}$. Підставимо вираз x_1 у друге рівняння: $\frac{6}{x_2^{2/3}} - \frac{3}{x_2^2} - \frac{27x_2^{4/3}}{9x_2^2} = 0$, або $6x_2^{-2/3} - 3x_2^{-2} - 3x_2^{-2/3} = 0$. Приведемо подібні члени та поділимо на 3: $x_2^{-2/3} - x_2^{-2} = 0$, або $x_2^2 - x_2^{2/3} = 0$. Виконаємо заміну змінних $x_2^{2/3} = z$, тоді $x_2^2 = z^3$. Одержимо нове рівняння $z^3 - z = 0$. Винесемо z за дужки, $z\left(z^2 - 1\right) = 0$, $z \neq 0$, тому що x_2 повинно бути позитивною величиною (x_2 > 0). Отже, залишається рівняння $z^2 - 1 = 0$, коренями якого є $z_1 = -1$ і $z_2 = 1$. Перший корінь є побічним, тому що відповідне рівняння $x_2^{2/3} = -1$ не має дійсних коренів. Тому $x_2^{2/3} = 1$. Тоді $x_1 = \frac{3}{1} = 3$. Отже знайдена стаціонарна точка $\bar{x}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. Знайдемо всі другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = \frac{\partial\left(2x_2 - \frac{54}{x_1^3 x_2}\right)}{\partial x_1} = \frac{162}{x_1^4 x_2};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = \frac{\partial\left(2x_1 - \frac{3}{x_2^2} - \frac{27}{x_1^2 x_2^2}\right)}{\partial x_2} = \frac{6}{x_2^3} + \frac{54}{x_1^2 x_2^3};$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial\left(2x_2 - \frac{54}{x_1^3 x_2}\right)}{\partial x_2} = 2 + \frac{54}{x_1^2 x_2^2}.$$

Підставимо в вирази других частинних похідних значення стаціонарної точки, тобто обчислимо другі частинні похідні:

$$\left.\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)\right|_{\bar{x}^0} = \left.\left(\frac{162}{x_1^4 x_2}\right)\right|_{\bar{x}^0} = \frac{162}{3^4} = 2; \qquad \left.\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\right)\right|_{\bar{x}^0} = \left.\left(\frac{6}{x_2^3} + \frac{54}{x_1^2 x_2^3}\right)\right|_{\bar{x}^0} = 6 + \frac{54}{9} = 12;$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\right)\right|_{\bar{x}^0} = \left.\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\right)\right|_{\bar{x}^0} = \left.\left(2 + \frac{54}{x_1^2 x_2^2}\right)\right|_{\bar{x}^0} = 2 + \frac{54}{27} = 4.$$

Складемо гессіан для стаціонарної точки: $\mathbf{H}^\circ = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$.

Визначимо характер стаціонарної точки за критерієм Сильвестра:

$$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 24 - 16 = 8 > 0.$$

Обоє головних визначника позитивні. Отже, матриця $\mathbf{H}^{\circ}$ позитивно визначена, а стаціонарна точка $\bar{x}^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ є точкою мінімуму.

4. Знайдемо значення функції в точці мінімуму:

$$y_{min} = y\left(\bar{x}^0\right) = 2 \cdot 3 \cdot 1 + \frac{3}{1} + \frac{27}{3^2 \cdot 1} = 12.$$

Таким чином, підприємство повинно виробити 3 *од*. продукції *A* та 1 *од*. продукції *B*. За такими умовами загальні витрати на виробництво будуть мінімальними и становитимуть 12 *грн*.

2.2.2. Багатовимірні оптимізаційні задачі з обмеженнями у вигляді рівностей. Метод Лагранжа

Математична модель багатовимірної оптимізаційної задачі з обмеженнями у вигляді рівностей має вигляд:

$$y(\bar{x}) \to \min_{\bar{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n}, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{\Omega}: \quad f_i(\bar{x}) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad n < m. \tag{2.10}$$

Якщо розбити вектор змінних $\bar{x}$ на залежні змінні $\bar{s}$ і незалежні $\bar{t}$ $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{s} \\ \bar{t} \end{bmatrix}$,

то *необхідні умови* локального умовного оптимуму мають вигляд:

$$\boxed{\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{t}}\right)^* = 0} \tag{2.11}$$

де $\left(\frac{\delta y}{\delta \bar{\mathbf{t}}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{\mathbf{t}}}\right)^{\mathrm{T}} - \left(\frac{\partial y}{\partial \bar{\mathbf{s}}}\right)^{\mathrm{T}} (\mathbf{W})^{-1} \mathbf{C}$;

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s_1} & \frac{\partial f_1}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial s_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s_1} & \frac{\partial f_2}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial s_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial s_1} & \frac{\partial f_m}{\partial s_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial s_m} \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial t_1} & \frac{\partial f_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial t_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial t_1} & \frac{\partial f_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial t_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial t_1} & \frac{\partial f_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial t_p} \end{bmatrix}.$$

Достатні умови точки локального мінімуму полягають у позитивній визначеності матриці $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P}_{tt} - \mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C} - \left(\mathbf{P}_{ts}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{т}} + \left(\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}\right)^{\mathrm{т}}\mathbf{P}_{ss}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{C}, \qquad (2.12)$$

де $\mathbf{P} = \mathbf{H} - \sum_{i}^{m} \lambda_i \mathbf{H}_i$; $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{ss} & \mathbf{P}_{st} \\ \mathbf{P}_{ts} & \mathbf{P}_{tt} \end{bmatrix}$; $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$;

$$\lambda^{\mathrm{т}} = \left(\frac{\delta\ y}{\delta\ \mathbf{f}}\right)^{\mathrm{т}} = \left(\frac{\partial\ y}{\partial\ \mathbf{s}}\right)^{\mathrm{т}} \mathbf{W}^{-1}; \quad \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

Задачі багатомірної оптимізації з обмеженнями у вигляді рівностей розв’язують за:

– методом підстановки (залежні змінні виражають через незалежні й підставивши їх у цільову функцію розв’язують як задачу безумовної мінімізації);

– методом Якобі;

– методом невизначених множників Лагранжа.

Знаходження стаціонарних точок методом Лагранжа

Метод Лагранжа полягає у відшуканні екстремуму спеціальної функції – функції Лагранжа Це дозволяє перейти від умовної оптимізації до безумовної.

Функція Лагранжа має вигляд

$$L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right) = y\left(\bar{x}\right) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i\left(\bar{x}\right), \qquad (2.13)$$

Візьмемо перші похідні від функції Лагранжа по змінним вектора $\bar{x}$. Відповідно до необхідних умов дорівняємо їх до нуля:

$$\left(\frac{\partial L\left(\bar{x}, \bar{\lambda}\right)}{\partial \bar{x}}\right)^{*} = 0\ . \qquad (2.14)$$

Візьмемо перші похідні від функції Лагранжа по змінним $\bar{\lambda}$, вони дорівнюють відповідним обмежуючим функціям

$$\frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial \lambda} = -\bar{f}(\bar{x}).. \tag{2.15}$$

Після розв'язання системи $\begin{cases} \dfrac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial \bar{x}} = 0; \\ \bar{f}(\bar{x}) = 0 \end{cases}$ знайдемо стаціонарні точки, які можна досліджувати на екстремум за допомогою достатніх умов безумовного локального екстремуму (2.12).

Приклад 2.1.

Знайти стаціонарні точки для задачі

$$y(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \rightarrow \min_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}},$$
$$\mathbf{\Omega}: \quad f = x_1x_2 - 4 = 0.$$

Розв'язання

Складемо функцію Лагранжа:

$$L(\bar{x},\bar{\lambda}) = y(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(\bar{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - \lambda(x_1x_2 - 4).$$

Візьмемо перші похідні функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial x_1} = 2x_1 + 2x_2 - \lambda x_2;$$
$$\frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial x_2} = 2x_2 + 2x_1 - \lambda x_1;$$
$$\frac{\partial L(\bar{x},\bar{\lambda})}{\partial \lambda} = -(x_1x_2 - 4).$$

Виходячи з необхідних умов для точки локального оптимуму, дорівняємо знайдені похідні до нуля:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - \lambda x_2 = 0, \\ 2x_2 + 2x_1 - \lambda x_1 = 0, \\ x_1x_2 - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему. Коренями системи, а відповідно і стаціонарними точками будуть вектори $\bar{x}_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ і $\bar{x}_B = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$. Перевірка коренів підтверджує правильність розв'язання.

Індивідуальні завдання для самостійної роботи

Самостійна робота №1. Розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою жорданових виключень та обернення матриці

Варіант 1

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_3 = 0$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 2

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2 та перевірити вірність розв'язання при $x_4 = -1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 3

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_2, x_3, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_1 = 1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 4

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_2 = 0$, $x_5 = 1$, $x_3 = -1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 5

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_3, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_2 = 1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 6

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_5 та перевірити вірність розв'язання при $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 7

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 - 1 = 0 \\ x_2 - x_3 + 2 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - x_4 + 1 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_3 та перевірити вірність розв'язання при $x_4 = 1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 8

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_2, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_5 = 0$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 9

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 - 1 = 0 \\ 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_3 та перевірити вірність розв'язання при $x_4 = 3,\ x_5 = 1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 10

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_2, x_5 та перевірити вірність розв'язання при $x_1 = 1,\ x_3 = 0$, $x_4 = 1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 11

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 - 1 = 0 \\ 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_3 = 3$, $x_5 = 3$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 12

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_3, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_4 = -1$, $x_2 = 1,\ x_5 = 0$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 13

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 - 1 = 0 \\ 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_5 та перевірити вірність розв'язання при $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.	$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 14

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_3, x_5 та перевірити вірність розв'язання при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_4 = 1$.	$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 15

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 - 1 = 0 \\ 2x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_3, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_2 = 1$, $x_5 = 2$.	$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 16

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 + 1 = 0 \\ x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_4, x_5 та перевірити вірність розв'язання при $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$.	$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 15 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 17

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} -2x_1+x_2+2x_4-1=0 \\ -x_2-x_3-x_4+2=0 \\ x_1-2x_2+2x_3+1=0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_3 та перевірити вірність розв'язання при $x_4=1$.	$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 18

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5-1=0 \\ 2x_2+2x_3+x_5+1=0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2 та перевірити вірність розв'язання при $x_3=1$, $x_4=1$, $x_5=2$.	$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 8 & 9 & 4 \\ 13 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 19

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} x_1-x_4+2=0 \\ x_2+x_3-1=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_3 та перевірити вірність розв'язання при $x_4=2$.	$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 5 \\ 8 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 20

Розв'язати систему рівнянь	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці
$$\begin{cases} -2x_1+x_2+2x_4-1=0 \\ -x_2-x_3-x_4+2=0 \\ x_1-2x_2+2x_3+1=0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_4 та перевірити вірність розв'язання системи лінійних рівнянь при $x_3=5$.	$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 21

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5-1=0 \\ 2x_2+2x_3+x_5+1=0 \end{cases}$ відносно змінних x_1, x_3 та перевірити вірність розв'язання при $x_2=1$, $x_4=1$, $x_5=-2$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 22

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -2x_1+x_2+2x_4-1=0 \\ -x_2-x_3-x_4+2=0 \\ x_1-2x_2+2x_3+1=0 \end{cases}$ відносно змінних x_1, x_3, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_2=2$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 23

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5-1=0 \\ 2x_2+2x_3+x_5+1=0 \end{cases}$ відносно змінних x_1, x_5 та перевірити вірність розв'язання при $x_2=x_3=-1$, $x_4=-1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 10 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 24

Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} -2x_1+x_2+2x_4-1=0 \\ -x_2-x_3-x_4+2=0 \\ x_1-2x_2+2x_3+1=0 \end{cases}$ відносно змінних x_2, x_3, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_1=1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & -1 \\ 8 & 4 & -1 \end{bmatrix}$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 25

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 2x_4 + 1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 1 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_3 та перевірити вірність розв'язання при $x_4 = -1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 26

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3 = 0 \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 + 1 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_2, x_3 та перевірити вірність розв'язання при $x_4 = 3$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 27

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_5 + 2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_4 та перевірити вірність розв'язання при $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_5 = 2$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -7 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 28

Розв'язати систему рівнянь $$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 + 3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 - 1 = 0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_3 та перевірити вірність системи лінійних рівнянь при $x_2 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$.

Варіант 29

Розв’язати систему рівнянь $$\begin{cases} -2x_1-x_2-x_3-3=0 \\ -x_1-x_3+2x_4+1=0 \\ x_2+x_3-x_4-2=0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_4, x_2 та перевірити вірність розв’язання при $x_3=2$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Варіант 30

Розв’язати систему рівнянь $$\begin{cases} 2x_1+x_3-2x_4-x_5+1=0 \\ x_2+x_4+2x_5=0 \end{cases}$$ відносно змінних x_1, x_4 та перевірити вірність розв’язання при $x_2=0$, $x_5=1$, $x_3=-1$.	Знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$ та довести тотожність $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{E}$.

Самостійна робота №2. Складання математичної моделі задачі лінійного програмування та її розв’язання за графічним методом

Варіант 1

Кондитерська фабрика для виробництва двох видів карамелі *A* і *B* використовує два види основної сировини: цукровий пісок і патоку. На виробництво 1 *т* карамелі *A* витрачається 2 *т* цукрового піску та 3 *т* патоки. На виробництво 1 *т* карамелі *B* витрачається 1 *т* цукрового піску та 4 *т* патоки. Відомо також, що фабрика не може використовувати більше 4 *т* цукрового піску та більше 10 *т* патоки. Прибуток від реалізації 1 *т* карамелі *A* становить 4 *тис. грн.*, а прибуток від реалізації 1 *т* карамелі *B* – 5 *тис. грн.* Визначити оптимальні кількості карамелі *A* і *B,* за якими прибуток від реалізації продукції є максимальним.

Варіант 2

Меблевій фабриці необхідно вирізувати із стандартних листів фанери заготівлі трьох видів відповідно у кількості 24, 31, 18 *шт.* Кожен лист фанери можна розрізати на заготівлі двома способами. Кількість одержаних заготівель з одного листа першим способом становить 2 *шт.* першого виду, 5 *шт.* другого виду, 2 *шт.* третього виду, а другим способом – 6 *шт.* першого виду, 4 *шт.* другого виду, 3 *шт.* третього виду. Площа відходів при обох способах розкрою одного листа фанери однакова і становить 16 $см^2$ з кожного листа. Необхідно визначити, скільки листів фанери треба розкроїти кожним способом, щоб було одержано не менше за потрібну кількість заготівель при мінімальних загальних відходах.

Варіант 3

На швейній фабриці для виготовлення двох видів виробів може бути використана тканина трьох артикулів. Норми витрати тканини артикулу I на виріб першого виду становить 1 *м*, для другого – 2 *м*. Для тканини артикулу II витрата на виріб першого виду становить 3 *м*, для другого – 1 *м*. Для тканини артикулу III витрата на виріб першого виду становить 4 *м*, для другого – 2 *м*. Фабрика має в своєму розпорядженні тканину артикулу I в кількості 18 *м*, артикулу II – 21 *м*, артикулу III – 30 *м*. Вартість виробу першого виду становить 9 *грн.*, вироби другого виду – 6 *грн*. Визначити, скільки виробів кожного виду повинна виготовляти фабрика, щоб загальна вартість продукції була максимальною

Варіант 4

Приватна фірма виробляє продукцію двох видів *A* і *B*, використовуючи при цьому устаткування, електроенергію і трудові ресурси. Виробництво 1 *т* виробів виду *A* потребує 3 *кв.час.* електроенергії, 4 *станко-год.* устаткування і 2 *чол.год.* трудових ресурсів. Виробництво 1 *т.* виробів виду *B* потребує 4 *кв.час.* електроенергії, 2 *станко-год.* устаткування і 7 *чол.-год.* трудових ресурсів. Фірма має у своєму розпорядженні 12 *кв.год.* електроенергії. Устаткування і трудові ресурси нераціонально експлуатувати менше ніж 8 *станко-годин* і 10 *чол-.год.* відповідно. На виробництво 1 *т* виробу *A* витрачається 2 *год.*, а на виробництво 1 *т* виробу *B* – 1 *год*. Визначити кількість (у тонах) виробів кожного виду, щоб не перевищити ліміт електроенергії, зробити експлуатацію устаткування і трудових ресурсів раціональною і мінімізувати загальну витрату часу на виробництво.

Варіант 5

Фірма випускає два види морозива: вершкове та шоколадне. Для виготовлення морозива використовуються початкові продукти: молоко і наповнювачі, витрати яких на 1 *кг* морозива та добові запаси початкових продуктів наведені в таблиці. Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на вершкове морозиво перевищує шоколадне не більше ніж на 100 *кг*. Крім того, встановлено, що попит на шоколадне морозиво не перевищує 350 *кг* на добу. Відпускна ціна 1 *кг* вершкового морозива складає 16 *грн.*, шоколадного – 14 *грн*. Скільки вершкового та шоколадного морозива повинна випускати фірма, щоб доход від реалізації продукції був максимальним.

Початковий продукт	Витрата початкових продуктів на 1 *кг* морозива		Запас (*кг*)
	Вершкове	Шоколадне	
Молоко	0,8	0,5	400
Наповнювачі	0,4	0,8	365

Варіант 6

Фірма займається пошиттям дитячих спідниць і брюк. Наявна тканина може бути розкроєна способом *A* чи *B*. При розкрої способом *A* з 1 $м^2$ одержують 1,6 брюк і 2 спідниці. При розкрої способом *B* з 1 $м^2$ одержують 2,5 брюк і 1,7 спідниць. Величина відходів з 1 $м^2$ при розкрої тканини способом *A* складає 0,07 $м^2$, а при розкрої способом *B* – 1 $м^2$. Фірма повинна випустити не менше 10 брюк і не менше 10 спідниць. При цьому фірма для пошиття брюк і спідниць має в своєму розпорядженні 6 $м^2$ тканині. Потрібно визначити, скільки тканини та яким способом необхідно розкроїти, щоб мінімізувати загальні відходи.

Варіант 7

Господарство має в своєму розпорядженні наступні ресурси: площа – 121 *од*., працевтрата – 162 *од*., потужність – 51 *од*. Господарство виготовляє два види продукції *П*1 і *П*2. Для виробництва одиниці продукції *П*1 потрібно 4 *од*. площі, 3 *од*. працевтрати і 2 *од*. потужності. Для виробництва одиниці продукції *П*2 потрібно 3 *од*. площі, 6 *од*. працевтрати та 1 *од*. потужності. Прибуток від реалізації одиниці продукції *П*1 становить 1 *грн*., а від реалізації продукції *П*2 – 4 *грн*. Скласти план випуску продукції, що забезпечить господарству максимальний прибуток.

Варіант 8

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 40 *од*. живильної речовини *A*, не менше 24 *од*. речовини *B* і не менше 35 *од*. речовини *C*. На 1 *кг* корму виду I доводиться 8 *од*. живильної речовини *A*, 3 *од*. живильної речовини *B* і 4 *од*. живильної речовини *C*. На 1 *кг* корму виду II доводиться 5 *од*. живильної речовини *A*, 4 *од*. живильної речовини *B* і 7 *од*. живильної речовини *C*. Ціна 1 *кг* обох кормів однакова і становить 2 *грн*. за 1 *кг* Визначити денний раціон тварин (кількість корму кожного виду), що забезпечить отримання необхідної кількості живильних речовин при мінімальних грошових витратах на придбання корму.

Варіант 9

Нафтопереробний завод отримує чотири напівфабрикати: 402 *тис.л* алкілату, 400 *тис.л* крекінг-бензину, 400 *тис.л* бензину прямої перегонки та 300 *тис.л* ізопентону. В результаті змішування цих чотирьох компонентів в різних пропорціях утворюється два сорти авіаційного бензину: бензин *A* – 2:6:5:4 та бензин *B* – 3:1:2:1. Вартість 1 *тис.л* бензину *A* становить 120 *грн*., а вартість 1 *тис.л* бензину *B* – 100 *грн*. Скласти план випуску різних сортів авіаційного бензину за умови отримання максимальної вартості всієї продукції.

Варіант 10

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 15 *од.* живильної речовини *A*, не менше 12 *од.* речовини *B* і не менше 14 *од.* речовини *C*. На 1 *кг* корму виду I доводиться 3 *од.* живильної речовини *A*, 2 *од.* живильної речовини *B* і 4 *од.* живильної речовини *C*. На 1 *кг* корму виду II доводиться 3 *од.* живильної речовини *A*, 4 *од.* живильної речовини *B* і 2 *од.* живильної речовини *C*. Ціна 1 *кг* корму I становить 9 *грн.*, 1 *кг* корму II – 15 *грн.* Визначити денний раціон тварин (кількість корму кожного виду), що забезпечує отримання необхідної кількості живильних речовин при мінімальних грошових витратах на придбання корму.

Варіант 11

На заводі випускають вироби двох типів. Від реалізації кожного виробу завод отримує прибуток відповідно 2 *грн.* і 2,5 *грн.* На виготовлення виробів витрачаються ресурси трьох типів: енергія, матеріали і працевтрата. Витрати ресурсів на один виріб I становить 3 *од.* енергії, 4 *од.* матеріалів і 1 *од.* працевтрати. Витрати ресурсів на одиницю виробу II становить 3 *од.* енергії, 2 *од.* матеріалів і 2 *од.* працевтрати. Запаси ресурсів обмежені: енергія – 141 *од.*, матеріали – 180 *од.* і працевтрата – 70 *од.* Необхідно спланувати виробництво виробів так, щоб прибуток від їх реалізації був найбільшим.

Варіант 12

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 9 *од.* білків, не більше 8 *од.* вуглеводів і не менше 11,5 *од.* протеїну. Для складання раціону використовують два види корму: *A* та *B*. На 1 *кг* корму *A* доводиться 3 *од.* білків і по 1 *од.* вуглеводів і протеїнів. На 1 *кг* корму *B* доводиться 1 *од.* білків, 2 *од.* вуглеводів і 6 *од.* протеїнів. Вартість 1 *кг* корму *A* становить 4 *грн.*, 1 *кг* корму *B* – 6 *грн.* Скласти денний раціон поживності, що має мінімальну вартість.

Варіант 13

Нафтопереробний завод отримує чотири напівфабрикати: 500 *тис.л* алкілату, 320 *тис.л* крекінг-бензину, 400 *тис.л* бензину прямої перегонки і 300 *тис.л* ізопентону. В результаті змішування цих чотирьох компонентів в різних пропорціях утворюється два сорти авіаційного бензину: бензин *A* – 2:6:5:4 та бензин *B* – 3:1:2:1. Вартість 1 *тис.л* бензину *A* складає 150 *грн.*, а вартість 1 *тис.л* бензину В складає 50 *грн.* Скласти план випуску різних сортів авіаційного бензину за умови отримання максимальної вартості всієї продукції.

Варіант 14

З двох продуктів складається суміш. До складу суміші повинно входити не менше 6 *од.* хімічної речовини *A*, не менше 10 *од.* речовини *B* і не менше 12 *од.*

речовини *C*. При виготовленні продукту I хімічні речовини *A*, *B* і *C* змішуються в співвідношенні 2:1:3 відповідно, а при виготовленні продукту II – 1:4:4 відповідно. Вартість одиниці продукції відповідно дорівнює: I – 2 *грн.*, а II – 4 *грн.* Потрібно скласти найбільш дешеву суміш.

Варіант 15

На заводі випускають вироби двох типів. Від реалізації 1 *од.* кожного виробу завод отримує прибуток відповідно 2 *грн.* і 3 *грн.* На виготовлення виробів витрачаються ресурси трьох типів: енергія, матеріали і працевтрата. Витрати ресурсів на одиницю виробу I становить 3 *од.* енергії, 4 *од.* матеріалів і 1 *од.* працевтрати. Витрати ресурсів на одиницю виробу II становить 3 *од.* енергії, 2 *од.* матеріалів і 2 *од.* працевтрати. Запаси ресурсів обмежені: енергія – 15 *од.*, матеріали – 16 *од.* і працевтрата – 7 *од.* Необхідно спланувати виробництво виробів так, щоб прибуток від реалізації був найбільшим.

Варіант 16

Кондитерська фабрика для виробництва двох видів карамелі *A* та *B* використовує два види основної сировини: цукровий пісок і патоку. На виробництво 1 *т* карамелі виду *A* витрачається 2 *т* цукрового піску, 3 *т* патоки. На виробництво 1 *т* карамелі виду *B* витрачається 1 *т* цукрового піску і 4 *т* патоки. Відомо також, що фабрика не може використовувати більше 4,1 *т* цукрового піску і більше 10 *т* патоки. Прибуток від реалізації 1 *т* карамелі виду *A* складає 4 *тис.грн.*, а прибуток від реалізації 1 *т* карамелі виду *B* складе 1 *тис.грн.* Досвід показав, що попит на карамель *A* не перевищує попит на карамель *B* більш ніж на 1 *т*. Визначити оптимальну кількість карамелі виду *A* і виду *B*, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації продукції.

Варіант 17

Меблевій фабриці із стандартних листів фанери необхідно вирізувати заготівлі трьох видів відповідно у кількостях 18, 24, 16 (*шт.*). Кожен лист фанери можна розрізати на заготівлі двома способами. При цьому кількість заготівель з одного листа за першим способом складає 3 *шт.* I-го виду, 5 *шт.* II-го виду, 2 *шт* III-го виду, а за другим способом – 6 *шт.* I-го виду, 4 *шт.* II-го виду, 8 *шт.* III-го виду. Площа відходів при першому способі розкрою одного листа фанери становить 5 $см^2$ з листа, а при другому – 16 $см^2$ з листа. Необхідно визначити, скільки листів фанери треба розкроїти кожним із способів, щоб було отримано не менше за потрібні кількості заготівель при мінімальних загальних відходах.

Варіант 18

На швейній фабриці для виготовлення двох видів виробів може бути використана тканина двох артикулів. Норма витрати тканини артикулу I на виріб першого виду становить 1 *м*, для другого – 2 *м*. Для тканини артикулу II норма витрати на виріб першого виду становить 4 *м*, для другого – 2 *м*. Фабрика має в своєму розпорядженні тканину в наступних кількостях: артикул І – 18 *м* на добу, артикул ІІ – 30 *м* на добу. Вартість виробу першого виду становить 9 *грн*, другого виду – 6 *грн*. Другий виріб має обмеження по реалізації – не більше 4 *шт*. за добу. Визначити, скільки виробів кожного виду повинна виробляти фабрика, щоб вартість виготовлення продукції була максимальною.

Варіант 19

Приватна фірма виготовляє вироби двох видів *A* і *B*, використовуючи при цьому устаткування, електроенергію та трудові ресурси. Виробництво 1 *т* виробів виду *A* потребує 3 *кв.часа* електроенергії, 4 *станко-год*. устаткування і 2 *чол.-год*. трудових ресурсів. Виробництво 1 *т* виробів виду *B* потребує 4 *кв.часа* електроенергії, 2 *станко-год*. устаткування і 7 *чол.-год*. трудових ресурсів. Фірма має у своєму розпорядженні 12 *кв.год*. електроенергії. Устаткування і трудові ресурси нераціонально експлуатувати менше ніж 7 *станко-год*. та 12,5 *чол.-год*. відповідно. На виробництво 1 *т* виробу *A* витрачається 2 *год*., а на виробництво 1 *т* виробу *B* – 3 *год*. Необхідно визначити, скільки тон виробів кожного виду потрібно виробляти, щоб не перевищити ліміт електроенергії, зробити експлуатацію устаткування і трудових ресурсів раціональною та мінімізувати загальну витрату часу на виробництво.

Варіант 20

Фірма випускає два види морозива: вершкове та шоколадне. Для виготовлення морозива використовуються два початкові продукти: молоко і наповнювачі. Витрати початкових продуктів на 1 *кг* морозива та їх добові запаси наведені в таблиці. Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на шоколадне морозиво перевищує попит на вершкове не більше ніж на 50 *кг*. Відпускна ціна 1 *кг* вершкового морозива становить 16 *грн*., шоколадного – 14 *грн*. У якої кількості вершкового і шоколадного морозива повинна випускати фірма, щоб доход від реалізації продукції був максимальним.

Початковий продукт	Витрата початкових продуктів на 1 *кг* морозива		Запас (*кг*)
	Вершкове (*кг*)	Шоколадне (*кг*)	
Молоко	0,6	0,3	400
Наповнювачі	0,5	0,7	455

Варіант 21

Фірма займається пошиттям дитячих блуз і спідниць. Наявна тканина може бути розкроєна двома способами *A* та *B*. При розкрої способом *A* з 1 $м^2$ одержують 1,6 блуз і 2 спідниці. При розкрої способом *B* з 1 $м^2$ одержують 2 блузи та 1,62 спідниці. Величина відходів з 1 *м*^{2} при розкрої тканини способом *А* становить 0,1 *м*^{2}, а при розкрої способом *В* – 0,12 *м*^{2}. Фірма повинна випустити не менше 5 блуз і 5,1 спідниці. При цьому фірма для пошиття блуз і спідниць має 5 *м*^{2} тканини. Потрібно визначити, скільки тканини та яким способом необхідно розкроїти, щоб мінімізувати загальні відходи.

Варіант 22

Господарство має в своєму розпорядженні наступні ресурси: площа – 140 *од*., працевтрата – 147 *од*., потужність – 50 *од*. Господарство випускає два види продукції *П*1 і *П*2. Для виробництва одиниці продукції *П*1 потрібно 4 *од*. площі, 3 *од*. працевтрати та 2 *од*. потужності. Для виробництва одиниці продукції *П*2 потрібно 3 *од*. площі, 6 *од*. працевтрати та 1 *од*. потужності. Прибуток від реалізації одиниці продукції *П*1 становить 2 *грн*., а від реалізації продукції *П*2 – 4 *грн*. Скласти план випуску продукції, що забезпечує господарству максимальний прибуток.

Варіант 23

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 40 *од*. живильної речовини *A*, не менше 24 *од*. речовини *B* і не більше 56 *од*. речовини *C*. На 1 *кг* корму I доводиться 10 *од*. живильної речовини *A*, 3 *од*. живильної речовини *B* і 5 *од*. живильної речовини *C*. На 1 *кг* корму II доводиться 5 *од*. живильної речовини *A*, 4 *од*. живильної речовини *B* і 8 *од*. живильної речовини *C*. Ціна 1 *кг* корму I становить 4 *грн*., а 1 *кг* корму II – 5 *грн*. Визначити денний раціон тварин (кількість корму кожного виду), що забезпечує отримання необхідної кількості живильних речовин при мінімальних грошових витратах на придбання корму.

Варіант 24

Цех випускає два види деталей *A* та *B*. Кожна деталь обробляється трьома верстатами. Тривалість обробки деталі *A* на I-му, II-му та III-му верстатах відповідно дорівнює 12 *хв*., 15 *хв*. і 8 *хв*. Тривалість обробки деталі *B* на I-му, II-му та III-му верстатах відповідно дорівнює 10 *хв*., 18 *хв*. і 4 *хв*. Фонд робочого часу для I-го, II-го та III-го верстатів становить 780 *хв*., 1140 *хв*. і 480 *хв*. відповідно. Відпускна ціна за одну деталь виду *A* становить 30 *грн*., а за деталь виду *B* – 32 *грн*. Потрібно скласти план завантаження верстатів, що забезпечує цеху отримання максимального прибутку.

Варіант 25

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 12 од. живильної речовини *A*, не менше 14 *од*. речовини *B* і не менше 16 *од*. речовини *C*. На 1 *кг* корму I доводиться 3 *од*. живильної речовини *A*, 2 *од*. живильної речовини *B* і 4 *од*. живильної речовини *C*. На 1 *кг* корму II доводиться 3 *од*. живильної речовини *A*, 4 *од*. живильної речовини *B* і 2 *од*. живильної речовини *C*. Ціна 1 *кг* корму I становить 9 *грн*., 1 *кг* корму II – 15 *грн*. Визначити денний раціон тварин (кількість корму кожного виду), що забезпечує отримання необхідної кількості живильних речовин при мінімальних грошових витратах на придбання корму.

Варіант 26

Цех випускає два види деталей *A* та *B*. Кожна деталь обробляється трьома верстатами. Тривалість обробки деталі *A* на І-му, ІІ-му та ІІІ-му верстатах відповідно дорівнює 12 *хв*., 15 *хв*. і 6 *хв*. Тривалість обробки деталі *B* на І-му, ІІ-му та ІІІ-му верстатах відповідно дорівнює 10 *хв*., 18 *хв*. і 4 *хв*. Фонд робочого часу для І-го, ІІ-го та ІІІ-го верстатів становить 1000 *хв*., 1260 *хв*. і 440 *хв*. відповідно. Відпускна ціна за одну деталь виду *A* становить 30 *грн*., а за деталь виду *B* – 32 *грн*. Потрібно скласти план завантаження верстатів, що забезпечує цеху отримання максимального прибутку.

Варіант 27

При відгодівлі кожна тварина щодня повинна отримувати не менше 9 *од*. білків, не менше 8 *од*. вуглеводів і не менше 11 *од*. протеїну. Для складання раціону використовують два види корму: *A* і *B*. На 1 *кг* корму *A* доводиться 3 *од*. білків і по 1 *од*. вуглеводів і протеїнів. На 1 *кг* корму *B* доводиться 1 *од*. білків, 2 *од*. вуглеводів і 6 *од*. протеїнів. Вартість 1 *кг* корму *A* складає 4 *грн*., 1 *кг* корму *B* складає 6 *грн*. Скласти денний раціон поживності, що має мінімальну вартість.

Варіант 28

В інституті проводиться конкурс на кращу стінгазету. Одному студентові дано таке доручення: купити акварельні фарби за ціною 30 *грн*. за коробку та кольорові олівці за ціною 20 *грн*. за коробку. Олівців в порівнянні з фарбами потрібно купити не більше ніж на 3 коробки. На всю купівлю виділяється не більше 260 *грн*. Визначити максимальну кількість коробок фарб і олівців, що може придбати студент.

Варіант 29

З двох продуктів складається суміш. До складу суміші повинно входити не менше 6 *од*. хімічної речовини *A*, не менше 10 *од*. речовини *B* і не менше 16 *од*. речовини *C*. При виготовленні продукту І хімічні речовини *A*, *B* і *C* змішуються в співвідношенні 2:1:3 відповідно, а при виготовленні продукту ІІ – 1:4:4. Вартість одиниці продукції І становить 2 *грн*., а продукції ІІ – 4 *грн*. Потрібно скласти найбільш дешеву суміш.

Варіант 30

В інституті проводиться конкурс на кращу стінгазету. Одному студентові дано таке доручення: купити акварельні фарби за ціною 30 *грн*. за коробку і кольорові олівці за ціною 20 *грн*. за коробку. Фарб потрібно купити не менше 6. На купівлю виділяється не більше 260 *грн*. Визначити максимальну кількість коробок фарб і олівців, що може придбати студент.

Самостійна робота № 3. Складання двоїстої задачі та її розв'язання спеціальним симплекс-методом

Варіант **1**	Варіант **2**
Для задачі $y(\bar{x}) = 30x_1 - 32x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 12x_1 + 10x_2 \le 100 \\ f_2 = 15x_1 + 18x_2 \le 126 \\ f_3 = 6x_1 + 4x_2 \le 44 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Для задачі $y(\bar{x}) = x_1 + 3x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = -x_1 + 2x_2 \le 5 \\ f_2 = x_1 + x_2 \le 16 \\ f_3 = 6x_1 - 2x_2 \ge -1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **3**	Варіант **4**
Для задачі $y(\bar{x}) = x_1 + x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$, $\Omega: \begin{cases} f_1 = 30x_1 + 20x_2 \le 260 \\ f_2 = x_2 - x_1 \le 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Для задачі $y(\bar{x}) = 6x_2 - 3x_1 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$, $\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \le 15 \\ f_2 = -2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **5**	Варіант **6**
Для задачі $y(\bar{x}) = 4x_1 + x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 \le 4{,}1 \\ f_2 = 3x_1 + 4x_2 \le 10 \\ f_3 = x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Для задачі $y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ f_2 = x_1 + x_2 \le 3 \\ f_3 = 2x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.

Варіант **7** Для задачі $y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = -2x_1 + x_2 \le 4 \\ f_2 = x_1 - x_2 \ge -6 \\ f_3 = 3x_1 + x_2 \le 18 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **8** Для задачі $y(\bar{x}) = 9x_1 + 6x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + 2x_2 \le 18 \\ f_2 = 3x_1 + x_2 \le 21 \\ f_3 = 4x_1 + 2x_2 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **9** Для задачі $y(\bar{x}) = 4x_1 + 5x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 \le 4 \\ f_2 = 3x_1 + 4x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **10** Для задачі $y(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400 \\ f_2 = 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365 \\ f_3 = x_1 - x_2 \le 100 \\ f_4 = x_2 \le 350 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **11** Для задачі $y(\bar{x}) = 2x_1 + 5x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = -2x_1 + x_2 \le 3 \\ f_2 = x_1 - 2x_2 \le 5 \\ f_3 = x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **12** Для задачі $y(\bar{x}) = x_1 + 4x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 4x_1 + 3x_2 \le 121 \\ f_2 = 2x_1 + x_2 \le 51 \\ f_3 = 3x_1 + 6x_2 \le 162 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.

Варіант **13** Для задачі $y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \le 8 \\ f_2 = -2x_1 + x_2 \le 4 \\ f_3 = x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв’язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **14** Для задачі $y(\bar{x}) = 120x_1 + 10x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + 3x_2 \le 402 \\ f_2 = 6x_1 + x_2 \le 400 \\ f_3 = 5x_1 + 2x_2 \le 400 \\ f_2 = 4x_1 + x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв’язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **15** Для задачі $y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = -2x_1 + x_2 \le 4 \\ f_2 = x_1 - x_2 \ge -6 \\ f_3 = x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв’язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **16** Для задачі $y(\bar{x}) = 2x_1 + 2{,}5x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 3x_1 + 3x_2 \le 12 \\ f_2 = 4x_1 + 2x_2 \le 14 \\ f_3 = x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв’язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **17** Для задачі $y(\bar{x}) = 2x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \le 8 \\ f_2 = 2x_1 - x_2 \le 6 \\ f_3 = x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв’язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **18** Для задачі $y(\bar{x}) = 150x_1 + 50x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\Omega}$ $\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + 3x_2 \le 500 \\ f_2 = 6x_1 + x_2 \le 320 \\ f_3 = 5x_1 + 2x_2 \le 400 \\ f_4 = 4x_1 + x_2 \le 300 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$ скласти двоїсту задачу та розв’язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.

Варіант **19** Для задачі $$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 - x_2 \le 8 \\ f_2 = x_1 + x_2 \le 8 \\ f_3 = 2x_1 - 3x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **20** Для задачі $$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = 3x_1 + 3x_2 \le 15 \\ f_2 = 4x_1 + 2x_2 \le 16 \\ f_3 = x_1 + 2x_2 \le 7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **21** Для задачі $$y(\bar{x}) = -3x_1 + 6x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \le 15 \\ f_2 = -2x_1 + 3x_2 \le 10 \\ f_3 = -6x_1 + 2x_2 \ge -12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **22** Для задачі $$y(\bar{x}) = 2x_1 + x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 \le 8 \\ f_2 = x_1 - x_2 \le 6 \\ f_3 = -x_1 + 2x_2 \ge -4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **23** Для задачі $$y(\bar{x}) = 9x_1 + 6x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 + 2x_2 \le 18 \\ f_2 = 4x_1 + 2x_2 \le 30 \\ f_3 = x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **24** Для задачі $$y(\bar{x}) = x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = -x_1 + 3x_2 \le 20 \\ f_2 = x_1 + x_2 \le 9 \\ f_3 = 2x_1 - x_2 \ge -3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.

Варіант **25** Для задачі $$y(\bar{x}) = 16x_1 + 14x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = 0{,}6x_1 + 0{,}3x_2 \le 400 \\ f_2 = 0{,}5x_1 + 0{,}7x_2 \le 455 \\ f_3 = -x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **26** Для задачі $$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = x_1 - 3x_2 \ge -9 \\ f_2 = x_1 + x_2 \le 9 \\ f_3 = -2x_1 + x_2 \ge -2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **27** Для задачі $$y(\bar{x}) = 2x_1 + 4x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = 4x_1 + 3x_2 \le 140 \\ f_2 = 3x_1 + 6x_2 \le 147 \\ f_3 = 2x_1 + x_2 \le 50 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **28** Для задачі $$y(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \le 16 \\ f_3 = -2x_1 + x_2 \ge -8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.
Варіант **29** Для задачі $$y(\bar{x}) = 30x_1 + 32x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = 12x_1 + 10x_2 \le 78 \\ f_2 = 15x_1 + 18x_2 \le 114 \\ f_3 = 8x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.	Варіант **30** Для задачі $$y(\bar{x}) = 3x_1 + 2x_2 \to \max_{\bar{x}\in\Omega}$$ $$\Omega: \begin{cases} f_1 = -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ f_2 = x_1 + 2x_2 \le 16 \\ f_3 = -2x_1 + x_2 \ge -7 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$ скласти двоїсту задачу та розв'язати обидві задачі спеціальним симплекс-методом.

<u>Самостійна робота № 4.</u> Розв'язання задачі лінійного програмування за допомогою диференційного алгоритму

Самостійна робота складається з двох завдань:

1. Розв'язати задачу лінійного програмування зі самостійної роботи №2 за допомогою диференційного алгоритму.

2. Порівняти результати розв'язання задачі за диференційним алгоритмом з результатами самостійної роботи №2. Дати відповідь на запитання, які переваги та недоліки має диференційний алгоритм в порівнянні з графічним методом.

<u>Самостійна робота № 5.</u> Складання математичної моделі транспортної задачі та її розв'язання методом потенціалів

Варіант 1

У пунктах *A*, *B* і *C* знаходяться відповідно 60, 70 і 20 (*т*) пального. Пунктам 1, 2, 3, 4 потрібно мати відповідно 40, 30, 30 и 50 (*т*) пального. Вартість перевезення 1 *т* пального з пункту *A* в пункти 1, 2, 3, 4 дорівнює 2, 4, 5, 1 (*грн.*) за 1 *т* відповідно, з пункту *B* в пункти 1, 2, 3, 4 дорівнює 2, 3, 9, 4 (*грн.*) за 1 *т* відповідно, з пункту *C* а в пункти 1, 2, 3, 4 дорівнює 3, 4, 2, 5 (*грн.*) за 1 *т* відповідно. Складіть план перевезень пального, який мінімізує загальну суму транспортних витрат.

Варіант 2

Три заводи випускають вантажні автомобілі, які відправляють чотирьом споживачам. Перший завод поставляє 30 платформ з вантажівками, другий – 50 платформ, третій – 70 платформ. Потрібно поставити платформи споживачам: першому та другому – по 25 *шт.*, третьому – 40 *шт.*, четвертому – 60 *шт.* Вартість перевезення однієї платформи від постачальника до споживача вказана в таблиці. Складіть оптимальний план доставки вантажних автомобілів;

Постачальники	**Вартість перевезення (*грн.*)**			
	споживачеві 1	**споживачеві 2**	**споживачеві 3**	**споживачеві 4**
I	1	2	1	3
II	1	2	2	1
III	2	2	2	2

Варіант 3

Будівництво магістрального шляху полягає в заповненні вибоїн і зрізу виступів на трасі до рівня основної дороги. Зрізаним ґрунтом заповнюються вибоїни. Перевезення ґрунту здійснюється вантажівками однакової вантажопідйомності. Відстань в кілометрах від зрізів до вибоїн і об'єм робіт вказані в таблиці. Складіть оптимальний план перевезень ґрунту.

Постачальники (зріз)	Відстань від зрізу до вибоїни (*км*)				Наявність ґрунту (*т*)
	Споживачі (вибоїни)				
	1	2	3	4	
I	2	2	3	1	40
II	1	2	1	2	50
III	3	2	3	1	60
Потреба у ґрунті (*т*)	20	20	55	55	

Варіант 4

Вантаж, що зберігається на трьох складах і потребує для перевезення 50, 30, 70 автомашин відповідно, необхідно перевезти в чотири магазини. Першому магазину потрібно 25 машин вантажу, другому – 40, третьому – 25 і четвертому – 60 машин. Вартість пробігу однієї автомашини від складів до магазинів вказані в таблиці. Складіть оптимальний за вартістю план перевезення вантажу від складів до магазинів.

Склади	Вартість пробігу (*грн.)*			
	Магазин 1	Магазин 2	Магазин 3	Магазин 4
I	1	2	1	3
II	1	2	2	1
III	2	2	1	2

Варіант 5

На складах *А*, *В* і *С* знаходиться сортове зерно в кількостях 55, 40, 60 (*т*). відповідно, яке потрібно доставити в чотири пункти. Пункту 1 необхідно поставити 65 *т*, пункту 2 – 20, пункту 3 – 50, пункту 4 – 20. Вартість перевезення 1 *т* зерна зі складу *А* до вказаних пункти відповідно дорівнює (*грн.*) 3, 1, 2, 1; зі складу *В* – 1, 4, 1, 3; зі складу *С* – 1, 2, 2, 3. Складіть оптимальний план перевезення зерна за умови мінімуму вартості перевезення.

Варіант 6

Завод має три цехи – *А, В* і *С* та чотири склади – 1, 2, 3 і 4. Цех *А* виготовляє 60 *тис.шт.* виробів, цех *В* і цех *С* – по 50 *тис.шт.* виробів. Пропускна спроможність складів характеризується наступними показниками: склад 1 і склад 2 – по 40 *тис.шт.* виробів; склад 3 – по 30 *тис.шт.*; склад 4 – по 50 *тис.шт*. Вартість доставки 1 *тис.шт*. виробів з цеху *А* на склади 1, 2, 3, 4 – відповідно (*грн.):* 3, 3, 2, 2; з цеху *В* – відповідно 3, 4, 2, 1; з цеху *С* – відповідно 2, 1, 3, 4. Складіть такий план доставки виробів, щоб витрати на перевезення всіх виробів (160 *тис.шт.*) були б найменшими.

Варіант 7

На будівельному полігоні є три цегляні заводи, об'єм виробництва яких на добу дорівнює 60, 65, 70 (*т*) відповідно. Ці заводи задовольняють потреби чотирьох будівельних об'єктів відповідно в кількості 40; 60; 70 і 25 (*т*). Цегла на будівельні об'єкти доставляється автомобільним транспортом. Вартість перевезення 1 *т* цегли від заводів до будівельних об'єктів вказані в таблиці. Складіть оптимальний за вартістю план доставки цегли.

Заводи	**Вартість перевезення (*грн.*)**			
	Об'єкт 1	**Об'єкт 2**	**Об'єкт 3**	**Об'єкт 4**
I	2	4	3	2
II	3	1	2	3
III	5	4	1	5

Варіант 8

Є три станції технічного обслуговування (СТО), що виконують ремонтні роботи для чотирьох автопідприємств. Виробничі потужності СТО, вартість транспортування та ремонту автотранспорту в різних СТО, прогнозована кількість ремонтів в планованому періоді на кожному автопідприємстві наведені в таблиці. Потрібно визначити, яка кількість автомашин з кожного автопідприємства необхідно відремонтувати на кожній СТО, щоб витрати на ремонт і транспортування були мінімальними.

СТО	**Вартість ремонту та транспортування (*грн.*)**				**Виробнича потужність (*шт.*)**
	АТП-1	***АТП-2***	***АТП-3***	***АТП-4***	
I	4	5	6	4	20
II	3	2	3	4	40
III	2	2	3	2	90
Прогнозована кількість ремонтів (*шт.*)	60	50	20	20	

Варіант 9

Є три сорти паперу в кількостях 40, 35 і 70 (*т*), який можна використовувати на видання чотирьох книг. Знаючи тираж і витрату паперу на одну книгу, встановлені потреби в папері для кожної книги: для першої – 25 *т*, для другої – 35 *т*, для третьої – 40 *т* і для четвертої – 45 *т*. Собівартість тиражу *j*-ї книги при використанні *i*-го сорту паперу задається матрицею $c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ (*грн.*).

Визначити оптимальний розподіл паперу для видання цих книжок.

Варіант 10

Є три сховища з однорідним продуктом, в яких зосереджено 35, 55 і 60 (*т*) продукту відповідно. Продукт необхідно перевезти чотирьом споживачам відповідно в кількості 20, 30, 40 і 60 (*т*). Витрати на перевезення 1 *т* продукту від сховищ до споживачів наведено в таблиці. Визначити план перевезень продукту від сховищ до споживачів за умови мінімізації транспортних витрат.

Сховище	**Витрати на перевезення (*грн.*)**			
	Споживач 1	**Споживач 2**	**Споживач 3**	**Споживач 4**
I	3	2	2	3
II	4	3	5	2
III	3	2	4	1

Варіант 11

Промисловий концерн має три заводи і чотири склади в різних регіонах країни. Кожного місяця перший завод виготовляє 40 *од*. продукції, другій, – 60 *од*., третій – 50 *од*. Вся готова продукція повинна бути відправлена на склади. Місткість першого складу дорівнює 30 *од*. продукції, другого – 40 *од*., третього – 50 *од*., четвертого – 30 *од*. Витрати на транспортування продукції від заводу до складу наведені в таблиці. Визначити план перевезень продукту від сховищ до споживачів за умови мінімуму транспортних витрат.

Завод	**Витрати на транспортування (*грн.*)**			
	Склад 1	**Склад 2**	**Склад 3**	**Склад 4**
I	5	2	3	2
II	4	3	2	2
III	4	3	2	2

Варіант 12

Три нафтопереробні заводи з добовою продуктивністю 30, 60 і 60 тисяч галонів бензину забезпечують чотири бензосховища, попит яких складає 35, 45, 25 і 45 тисяч галонів відповідно. Бензин транспортується в бензосховища по трубопроводу. Вартість (*грн.*) перекачування бензину від заводів до сховищ наведено в таблиці. Визначити план перекачування бензину від заводів до сховищ за умови мінімуму транспортних витрат.

Нафтопереробний завод	**Вартість перекачування (*грн.*)**			
	Сховище 1	**Сховище 2**	**Сховище 3**	**Сховище 4**
I	1	1	2	4
II	2	2	1	3
III	2	1	3	1

Варіант 13

Три овочесховища щодня забезпечують картоплею чотири магазини. Магазини подали заявки відповідно на 30, 40, 60 і 20 (*т*). Овочесховища мають відповідно 45, 50 і 55 (*т*) картоплі. Скласти план перевезення картоплі з овочесховищ в магазини так, щоб витрати на доставку були мінімальними. Тарифи (у *грн*. за 1 *т*) на перевезення картоплі наведено в таблиці.

Овочесховище	**Вартість перевезення 1 *т* (*грн.*)**			
	Магазин 1	**Магазин 2**	**Магазин 3**	**Магазин 4**
I	2	2	3	3
II	3	2	1	4
III	2	3	1	3

Варіант 14

Є три спеціалізовані майстерні з ремонту двигунів. Їх виробничі потужності дорівнюють відповідно 30, 60, 60 ремонтів на рік. У чотирьох районах, що обслуговуються цими майстернями, потреба в ремонті становить відповідно 25, 35, 55, 35 двигунів на рік. Витрати на ремонт і перевезення одного двигуна з районів в майстерні і назад вказані в таблиці. Сплануйте кількість ремонтів кожної майстерні для кожного з районів, так щоб сумарні витрати на ремонт і доставку двигунів були мінімальними.

Майстерня	**Витрати на ремонт і перевезення одного двигуна (*грн.*)**			
	Район 1	**Район 2**	**Район 3**	**Район 4**
I	2	2	3	3
II	3	2	1	4
III	2	3	1	3

Варіант 15

Фірма здійснює постачання пляшок на чотири заводи, що займаються випуском прохолодних напоїв. Вона має три склади, причому на кожному складі знаходиться по 50 тисяч пляшок. Першому заводу потрібно 30 тисяч пляшок, другому – 40, третьому – 50 і четвертому – 30. Вартість (*грн.*) перевезення однієї тисячі пляшки від кожного складу кожному заводу задана матрицею:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Як треба організувати доставку пляшок на заводи, щоб вартість перевезення була мінімальною.

Варіант 16

У пунктах *A*, *B* і *C* знаходяться відповідно 60, 40 і 65 (*т*) пального. Пунктам 1, 2, 3, 4 потрібно мати 35, 45, 55 і 35 (*т*) пального. Вартість перевезення 1 *т* пального з пункту *A* в пункти 1, 2, 3, 4 дорівнює 3, 2, 3 та 4 (*грн.*) за 1 *т* відповідно, з пункту *B* в пункти 1, 2, 3, 4 дорівнює 5, 3, 2 та 1 (*грн.*) за 1 *т* відповідно, з пункту *C* а в пункти 1, 2, 3, 4 дорівнює 2, 3, 2 та 4 (*грн.*) за 1 *т* відповідно. Складіть план перевезень пального, який мінімізує загальну суму транспортних витрат.

Варіант 17

Три заводи випускають вантажні автомобілі, які відправляються чотирьом споживачам на спеціальних платформах. Перший завод поставляє 45 платформ з вантажівками, другий – 30 платформ, третій – 65. Потрібно поставити платформи споживачам: першому – 35 *шт*, другому – 40 *шт.*, третьому – 25 *шт.*, четвертому 40 *шт*. Вартість перевезення однієї платформи від постачальника до споживача вказана в таблиці (*грн.)*. Складіть оптимальний план доставки вантажних автомобілів.

Постачальник	**Вартість перевезення однієї платформи (*грн.)***			
	Споживач 1	**Споживач 2**	**Споживач 3**	**Споживач 4**
I	2	2	4	1
II	3	3	5	4
III	2	2	2	2

Варіант 18

Будівництво магістрального шляху полягає в заповненні вибоїн і зрізу виступів, що є на трасі, до рівня основної дороги. Зрізаним ґрунтом заповнюються вибоїни. Перевезення ґрунту здійснюється вантажівками однакової вантажопідйомності. Відстань в кілометрах від зрізів до вибоїн і об'єм робіт вказані в таблиці. Складіть оптимальний план перевезень ґрунту.

Постачальники (зріз)	**Відстань від зрізу до вибоїни (*км*)**				**Наявність грунту (*т*)**
	Споживачі (вибоїни)				
	1	2	3	4	
I	3	5	4	4	35
II	2	4	3	3	70
III	3	4	4	3	45
Потреба у грунті (*т*)	40	50	40	20	

Варіант 19

Вантаж, що зберігається на трьох складах і вимагає для перевезення 50, 30, 70 автомашин відповідно, необхідно перевезти в чотири магазини. Першому магазину потрібно 25 машин вантажу, другому – 40, третьому – 25 і четвертому – 60 машин. Вартість пробігу однієї автомашини від складів до магазинів вказані в таблиці. Складіть оптимальний за вартістю план перевезення вантажу від складів до магазинів.

Склад	**Вартість пробігу однієї автомашини (*грн.*)**			
	Магазин 1	**Магазин 2**	**Магазин 3**	**Магазин 4**
I	4	4	5	5
II	2	3	6	5
III	2	4	5	3

Варіант 20

На складах *A*, *B* і *C* знаходиться сортове зерно в кількостях 40, 50, 60 (*т*). відповідно, яке потрібно доставити в чотири пункти. Пункту 1 необхідно поставити 30 *т*, пункту 2 – 40 *т*, пункту 3 – 45 *т*, пункту 4 – 35 *т*. Вартість (*грн.*) доставки 1 *т* зерна зі складу *A* у вказані пункти відповідно дорівнює 1, 3, 2, 5; зі складу *B* – 3, 4, 2, 4; зі складу *C* – 2, 1, 3, 4. Складіть оптимальний план перевезення зерна за умови мінімуму вартості перевезення.

Варіант 21

Завод має три цехи – *A*, *B* і *C* та чотири склади – 1; 2; 3; 4. Цех *A* виготовляє 45 *тис.шт.* виробів, цех *B* – 60; цех *C* – 45. Пропускна спроможність складів характеризується наступними показниками: склад 1 – 30 *тис.шт.* виробів; склад 2 – 20; склад 3 – 60; склад 4 – 40. Вартість доставки 1 *тис.шт.* виробів з цеху *A* на склади 1, 2, 3, 4 становить відповідно 1, 3, 2, 2 (*грн.*); з цеху *B* – відповідно 2, 2, 1, 3; з цеху *C* – відповідно 2, 2, 3, 1. Складіть такий план доставки виробів, щоб витрати на перевезення 150 *тис.шт.* виробів були найменшими.

Варіант 22

На будівельному полігоні є три цегляні заводи, об'єм виробництва яких на добу дорівнює 40, 40, 70 *т* відповідно. Ці заводи задовольняють потреби чотирьох будівельних об'єктів відповідно в кількості 40; 50; 30 і 30 *т*. Цегла на будівельні об'єкти доставляється автомобільним транспортом. Вартість перевезення 1 *т* цегли від заводів до будівельних об'єктів вказані в таблиці. Складіть оптимальний за вартістю план доставки цегли.

Заводи	**Вартість перевезення 1 *т* цегли**			
	Об'єкт 1	**Об'єкт 2**	**Об'єкт 3**	**Об'єкт 4**
I	1	3	3	5
II	2	2	3	4
III	3	4	3	5

Варіант 23

Є три станції технічного обслуговування (СТО), виконуючі ремонтні роботи для чотирьох автопідприємств. Виробничі потужності СТО, вартість транспортування та ремонту автотранспорту в різних СТО, прогнозована кількість ремонтів в планованому періоді на кожному автопідприємстві наведені в таблиці. Потрібно визначити, яка кількість автомашин з кожного автопідприємства необхідно відремонтувати на кожній СТО, щоб витрати на ремонт і транспортування були мінімальними.

СТО	**Вартість ремонту та транспортування**				**Виробнича потужність (*шт.*)**
	АТП-1	**АТП-2**	**АТП-3**	**АТП-4**	
I	3	5	5	3	45
II	2	4	5	3	45
III	3	4	4	4	60
Прогнозована кількість ремонтів	25	45	50	30	

Варіант 24

Є три сорти паперу в кількостях 70, 40 і 40 (*т*), який можна використовувати на видання чотирьох книг. Знаючи тираж і витрату паперу на одну книгу, встановлені потреби в папері для кожної книги: для першої – 30 *т*, для другої – 40 *т*, для третьої – 50 *т* і для четвертої – 30 *т*. Собівартість тиражу j-ї книги при використанні i-го сорту паперу задається матрицею $c_{ij} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ (*грн.*).

Визначити оптимальний розподіл паперу для видання цих книжок.

Варіант 25

Є три сховища з однорідним продуктом, в яких зосереджене 40, 65 і 45 (*т*) продукту відповідно. Продукт необхідно перевезти чотирьом споживачам відповідно в кількості 25, 45, 55 і 25 (*т*). Витрати на перевезення продукту від сховищ до споживачів наведені в таблиці. Визначити план перевезень продукту від сховищ до споживачів за умови мінімізації транспортних витрат.

Сховище	**Витрати на перевезення (*грн.)***			
	Споживач 1	**Споживач 2**	**Споживач 3**	**Споживач 4**
I	1	4	5	1
II	4	1	3	3
III	4	5	3	4

Варіант 26

Промисловий концерн має три заводи і чотири склади в різних регіонах країни. Кожного місяця перший завод виготовляє 40 *од*. продукції, другий – 25 *од*., третій – 35 *од*. Вся готова продукція повинна бути відправлена на склади. Місткість першого складу дорівнює 15 *од*. продукції, другого – 40 *од*., третього – 30 *од*., четвертого – 15 *од*. Витрати на транспортування продукції від заводу до складу наведені в таблиці. Визначити план перевезень продукту від сховищ до споживачів за умови мінімуму транспортних витрат.

Завод	**Витрати на транспортування (*грн.*)**			
	Склад 1	**Склад 2**	**Склад 3**	**Склад 4**
I	10	5	7	4
II	7	4	9	10
III	6	14	8	7

Варіант 27

Три нафтопереробні заводи з добовою продуктивністю 40, 55 і 60 тисяч галонів бензину забезпечують чотири бензосховища, попит яких складає 20, 65, 20 і 50 тисяч галонів. Бензин транспортується в бензосховища по трубопроводу. Вартість (*грн.)* перекачування одної тисячі галонів бензину від заводів до сховищ наведено в таблиці. Визначити план перекачування бензину від заводів до сховищ за умови мінімуму транспортних витрат.

Нафтопереробний завод	**Вартість перекачування одної тисячі галонів бензину (*грн.)***			
	Сховище 1	**Сховище 2**	**Сховище 3**	**Сховище 4**
I	10	5	7	4
II	7	4	9	10
III	6	14	8	7

Варіант 28

Три овочесховища щодня забезпечують картоплею чотири магазини. Магазини подали заявки відповідно на 30, 25, 35 і 20 (*т*). Овочесховища мають відповідно 50, 40 і 20 (*т*) картоплі. Тарифи (у грн. за 1 *т*) наведено в таблиці. Скласти план перевезення картоплі з овочесховищ в магазини так, щоб витрати на доставку були мінімальними.

Овочесховище	**Вартість перевезення 1 *т* картоплі (*грн.*)**			
	Магазин 1	**Магазин 2**	**Магазин 3**	**Магазин 4**
I	2	3	2	3
II	3	2	1	4
III	2	3	2	4

Варіант 29

Є три спеціалізовані майстерні по ремонту двигунів. Їх виробничі потужності дорівнюють відповідно 45, 35, 70 ремонтів на рік. У чотирьох районах, що обслуговуються цими майстернями, потреба в ремонті становить відповідно 25, 35, 45, 45 двигунів на рік. Витрати на ремонт і перевезення одного двигуна з районів в майстерні і назад вказані в таблиці. Сплануйте кількість ремонтів кожної майстерні для кожного з районів, так щоб сумарні витрати на ремонт і доставку двигунів були мінімальними.

Майстерня	**Витрати на ремонт і перевезення одного двигуна (*грн.)***			
	Район 1	**Район 2**	**Район 3**	**Район 4**
I	3	1	2	4
II	2	2	3	3
III	2	4	3	1

Варіант 30

Фірма здійснює постачання пляшок на чотири заводи, що займаються випуском прохолодних напоїв. Вона має три склади, причому на першому складі знаходиться 35 тисяч пляшок, на другому – 70, на третьому – 45. Першому заводу потрібно 40 тисяч пляшок, другому – 50, третьому – 40 і четвертому – 20. Вартість (*грн.*) перевезення однієї тисячі пляшок від кожного складу кожному заводу задана матрицею:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Як треба організувати доставку пляшок на заводи, щоб вартість перевезення була мінімальною.

<u>Самостійна робота № 6.</u> Розв'язання задач нелінійного програмування

Варіант № 1

Розв'язати задачі:

1. $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \to \min\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\overline{x}) = -\dfrac{3}{x_1^2} - \dfrac{3}{x_2^2} - 6x_3 \to \max\limits_{\overline{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 2

1. Розв'язати задачі:

$y(\overline{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 \to \max\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\overline{x}) = -x_1x_2 \to \min\limits_{\overline{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = 2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 3

Розв'язати задачі:

1. $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_1x_2 \to \min\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\overline{x}) = -x_1x_2x_3 \to \max\limits_{\overline{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_1 + x_3 + x_2 - 1 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 4

Розв'язати задачі:

1. $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 9x_1x_2 \to \min\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\overline{x}) = -\dfrac{1}{x_1^2} - \dfrac{1}{x_2^2} - \dfrac{1}{8}x_3 \to \max\limits_{\overline{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 5

Розв'язати задачі:

1. $y(\overline{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 6x_1x_2 \to \max\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\overline{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \to \min\limits_{\overline{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 6

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_1x_2 \to \min\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -x_1^2 - x_3^2 + x_1 + 2x_2 \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega} : f_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 - 6 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 7

1. Розв'язати задачі:

2. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 9x_1x_2 \to \max\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

$y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 6x_3 \to \min\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega} : f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 8

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_1x_2 \to \min\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -\dfrac{2}{x_1^4} - \dfrac{2}{x_2^4} - x_3 \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega} : f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 9

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 18x_1x_2 \to \min\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -\dfrac{36}{x_1} - \dfrac{9}{x_2} - x_3 \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega} : f_1 = x_3 - \sqrt{x_1x_2} = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 10

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -x^2x_2 - \dfrac{3}{x_2} - \dfrac{2x_2}{x_1} \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 15x_3 \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega} : f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 11

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 12x_1x_2 \to \max\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 21x_3 \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 + 5 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 12

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1^2 x_2 + \dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{4}{x_1} \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -\dfrac{3}{x_1^2} - \dfrac{3}{x_2^2} - 6x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 13

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 15x_1x_2 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = x_1x_2 - 4 \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 14

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1^2 x_2 + \dfrac{4x_1^2}{x_2} + \dfrac{8}{x_1} \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 3x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 15

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 21x_1x_2 \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 3x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$ методом Лагранжа.

Варіант № 16

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = \dfrac{1}{4} x_1^2 x_2 + \dfrac{x_1^2}{x_2} + \dfrac{2}{x_1} \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 6x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 17

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 18x_1x_2 \to \max\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 12x_3 \to \min\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \ f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 18

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 21x_1x_2 \to \max\limits_{x \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = 2x_1x_3 + x_2^2 \to \min\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 5 = 0 \end{cases}$ методом Лагранжа.

Варіант № 19

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -3x_1^3 - 3x_2^3 - \dfrac{9}{x_1x_2} \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = 2x_1x_3 + 7x_2^2 - x_1 \to \min\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$ методом Лагранжа.

Варіант № 20

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = 3x_2 + \dfrac{2x_1}{x_2} + \dfrac{1}{x_1^2x_2} \to \min\limits_{\bar{x} \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -(x_1 - 3)^2 - (x_2 - 5)^2 \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \quad f_1 = x_2 - 2x_1 - 5 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 21

Розв'язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -2x_1x_2 - \dfrac{3}{x_2} - \dfrac{27}{x_1^2x_2} \to \max\limits_{\bar{x} \in \mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_3 \to \min\limits_{\bar{x} \in \mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 3 = 0 \\ f_2 = x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$ методом Лагранжа.

Варіант № 22

Розв’язати задачі:

1. $y(\overline{x}) = 2x_1x_2 + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} \to \min\limits_{\overline{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y\left(\overline{x}\right) = -x_1x_2 - 4x_3 \to \max\limits_{\overline{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ f_2 = x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$ методом Лагранжа.

Варіант № 23

Розв’язати задачі:

1. $y(\overline{x}) = -x_1^3 - x_2^3 - \frac{3}{x_1x_2} \to \max\limits_{\overline{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y\left(\overline{x}\right) = x_1^2 + x_2^2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \quad f_1 = x_1 + x_2 - 1 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 24

Розв’язати задачі:

1. $y\left(\overline{x}\right) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \to \min\limits_{x\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y\left(\overline{x}\right) = -2x_1x_3 + 7x_2^2 + x_1 \to \max\limits_{\overline{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = x_1 + x_2 - 4 = 0 \\ f_2 = x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$ методом Лагранжа.

Варіант № 25

Розв’язати задачі:

1. $y\left(\overline{x}\right) = -x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 \to \max\limits_{x\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y\left(\overline{x}\right) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \to \min\limits_{\overline{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: \quad f_1 = x_2 - 2x_1 - 5 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 26

Розв’язати задачі:

1. $y(\overline{x}) = -4x_1x_2^2 - \frac{1}{x_2} - \frac{x_2^2}{x_1} \to \max\limits_{\overline{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y\left(\overline{x}\right) = x_1x_2 - 4x_3 \to \min\limits_{\overline{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$$\mathbf{\Omega}: \begin{cases} f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0 \\ f_2 = x_3 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$ методом Лагранжа.

Варіант № 27

Розв’язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = -\frac{2}{9}x_1x_2^4 - \frac{8}{x_1} - \frac{16}{3x_2} \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = \frac{2}{x_1^4} + \frac{2}{x_2^4} + x_3 \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 28

Розв’язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1^2x_2 + \frac{4x_1^2}{x_2} + \frac{8}{x_1} \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 15x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 29

Розв’язати задачі:

$y(\bar{x}) = x_1x_2 + \frac{2}{x_1^4x_2^2} + \frac{2}{x_2^2} \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

$y(\bar{x}) = -x_1^3 - x_2^3 + 21x_3 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = x_3 - x_1x_2 + 5 = 0$ методом Лагранжа.

Варіант № 30

Розв’язати задачі:

1. $y(\bar{x}) = x_1x_2 + \frac{2}{x_2} + \frac{2}{x_1^2x_2} \to \min\limits_{\bar{x}\in\mathbf{R}^2}$ методом Ейлера.

2. $y(\bar{x}) = -x_1x_2 + 4 \to \max\limits_{\bar{x}\in\mathbf{\Omega}}$,

$\mathbf{\Omega}: f_1 = 3x_1 - x_2 + 2 = 0$ методом Лагранжа.

ЗМІСТ

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні вказівки до виконання практичних завдань та самостійної роботи з дисципліни «Математичне програмування» (для студентів денної і заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»).

Укладачі: Ганна Вікторівна Білогурова,
Валентина Петрівна Протопопова,
Олександр Васильович Клименко,
Микола Іванович Самойленко,
Ольга Миколаївна Штельма

Відповідальний за випуск: О.Б. Костенко

Редактор: М. З. Аляб'єв

Комп'ютерна верстка: І.В. Волосожарова

План 2009, поз. 504М

Підп. до друку.17.06.09 Формат 60x84 1/16 Папір офісний
Друк на різографі. Умовн.-друк. арк. 5.0 Обл.-вид. арк.5,5.
Зам. № Тираж 100 прим.

61002, Харків, ХНАМГ, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії ЦНІТ ХНАМГ
61002, Харків, вул. Революції, 12